

Міністерство освіти і науки України
ВСП « Ковельський промислово-економічний фаховий коледж
Луцького національного технічного університету»



МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Методичні вказівки до практичних занять
для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий
молодший бакалавр спеціальності 122 Комп'ютерні науки

Практичне заняття № 1

Тема. Побудова математичної моделі задачі.

Мета. Навчитися формулювати задачі оптимізації, будувати математичну модель, визначатися з критерієм оптимальності.

Контрольні питання

1. З яких етапів складається розв'язування оптимізаційних задач?
2. Що таке математична модель задачі?

Теоретичні відомості

Поняття задачі лінійного програмування та різні форми її задання

Під *задачею* лінійного програмування в загальному вигляді розуміють задачу знаходження мінімуму (максимуму) лінійної функції від n змінних на множині розв'язків системи лінійних нерівностей або лінійних рівнянь. Розглянемо це на конкретному прикладі.

Задача Завод додатково освоїв випуск продукції чотирьох асортиментів B_1, B_2, B_3, B_4 . Для випуску цієї продукції потрібна сировина чотирьох видів A_1, A_2, A_3, A_4 , яку завод може щомісячно виділяти в обмеженій кількості. Кількість сировини кожного виду, необхідної для виготовлення кожного виду продукції, ціна кожного виду продукції, а також лімітоване щомісячне надходження потрібної сировини подано в таблиці

Сировина	Щомісячне надходження сировини (ум.од.)	Витрати сировини на одиницю кожного виробу			
		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1260	2	4	6	8
A_2	900	2	2	0	6
A_3	530	0	1	1	2
A_4	210	1	0	1	0
Прибуток від реалізації одиниці виробу		8	10	12	18
Кількість продукції		x_1	x_2	x_3	x_4

Визначити, яку кількість треба випускати заводу кожного з видів продукції B_1, B_2, B_3, B_4 , щоб прибуток від її реалізації був максимальний.

Складемо математичну модель цієї задачі, тобто опишемо її в термінах математичної символіки. Позначимо через x_1, x_2, x_3, x_4 відповідно ті кількості продукції асортиментів B_1, B_2, B_3, B_4 , які треба випустити, щоб мати максимальний прибуток від їх реалізації. Тоді на випуск продукції B_1 буде витрачено $2x_1$ умовних одиниць сировини A_1 ; на випуск B_2 - $4x_2$, на випуск B_3 - $6x_3$, на випуск B_4 - $8x_4$ умовних одиниць сировини A_1 . Витрати сировини A_1 не повинні перевищувати 1260 умовних одиниць. Матимемо таку лінійну нерівність: $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 \leq 1260$.

Проблема "двох картопель". Фірма по переробці картоплі робить три види продукції: картопляні чіпси, кубики і пластівці. Аналіз завантаженості устаткування і попиту на ринку показує можливість зробити і збути до 1.8 т чіпсів, 1.2 т кубиків і 2.4 т пластівців. Необхідний для переробки картопля фірма закуповує в двох постачальників. Кількість готової продукції і відносний прибуток (дохід від реалізації готової продукції за винятком вартості сировини), який можна одержати з однієї т картоплі кожного постачальника, зазначені в наступній таблиці.

Вид готової продукції	Вихід готової продукції з 1 т картоплі, т		Потреби ринку збуту, т
	Постачальник 1	Постачальник 2	
Чіпси	0,2	0,3	1,8
Кубики	0,2	0,1	1,2
Пластівці	0,3	0,3	2,4
Відносний прибуток, грош. од.	5,0	6,0	

Потрібно визначити, яку кількість картоплі треба придбати в кожного постачальника, щоб забезпечити найбільший відносний прибуток з урахуванням можливості збуту готової продукції.

Задача 2

Скільки виробляти? Підприємство має у своєму розпорядженні ресурси сировини і робочої сили, необхідні для виробництва двох видів продукції. Витрати ресурсів на виготовлення однієї тони кожного продукту, прибуток, одержуваний підприємством від реалізації тони продукту, а також запаси ресурсів зазначені в наступній таблиці:

	Витрати ресурсу		Запас ресурсу
	на продукт 1	на продукт 2	
Сировина, т	3	5	120
Робоча сила, год.	14	12	400
Прибуток за одиницю продукту, тис. грн./т	30	35	

Скільки продукту 1 варто виробляти для того, щоб забезпечити максимальний прибуток?
 Скільки продукту 2 варто виробляти для того, щоб забезпечити максимальний прибуток?
 Який максимальний прибуток?

Задача 3

Нафтопереробна установка може працювати в двох різних режимах. При роботі в першому режимі з однієї тони нафти виробляється 300 кг темних і 600 кг світлих нафтопродуктів; при роботі у другому режимі — 700 кг темних і 200 кг світлих нафтопродуктів. Щодня на цій установці необхідно робити 110 т темних і 70 т світлих нафтопродуктів. Це планове завдання необхідно щодня виконувати, витрачаючи мінімальну кількість нафти.

Скільки тон нафти варто щодня переробляти в першому режимі? Скільки тон нафти варто щодня переробляти у другому режимі? Яка мінімальна щоденна витрата нафти?

Задача 4

Фірма «Television» виготовляє два види телевізорів: «Астро» і «Космо». У цеху 1 роблять телевізійні трубки. На виробництво однієї трубки до телевізора «Астро» потрібно витратити 1,2 людино-години, а на виробництво трубки до «Космо» — 1,8 людино-години. В даний час у цеху 1 на виробництво трубок до обох марок телевізорів може бути витрачено не більш 120 людино-години на добу.

У цеху 2 виготовляють шасі з електронною схемою телевізора. На виробництво шасі для телевізора будь-якої марки потрібно витратити 1 людино-годину. На виробництво шасі до

обох марок телевізорів у цеху 2 може бути витрачено не більш 90 людино-годин у день. Продаж кожного телевізора марки «Астро» забезпечує прибуток у розмірі 150 грн., а марки «Космо» — 200 грн. Фірма зацікавлена в максимізації прибутку. Скільки телевізорів «Астро» варто виготовляти щодня? Який максимальний щоденний прибуток телевізійної компанії?

Задача 5

Джон, крім занять у школі, для підтримки належного фінансового рівня повинний працювати не менш 20 годин на тиждень. Для цього в нього є прекрасна можливість працювати в двох магазинчиках. У першому він може працювати від 5 до 12 годин на тиждень, а в другому — від 6 до 10 годин. Обидва магазини пропонують однакову погодинну оплату. Джон повинний визначитися, у якому магазині і скільки йому працювати, виходячи з фактора "напруженості" роботи. Грунтуючись на інформації, що була отримана при спілкуванні з працівниками цих магазинів, він оцінив цей фактор по 10-бальній шкалі: для першого і другого магазинів відповідно 8 і 6 балів. Зрозуміло, що сумарна "напруженість" роботи за тиждень пропорційна кількості відпрацьованих годин. Скільки годин Джон повинний працювати в кожному магазині, щоб мінімізувати загальну сумарну "напруженість" роботи?

Задача 6

Нафтова компанія OilCo буде новий нафтопереробний завод для виробництва 4 видів продуктів: дизельне паливо, бензин, мастильні матеріали й авіаційне паливо. Попит на ці види продукції складає відповідно 14, 30, 10 і 8 тис. барелей у день. Компанія уклала контракти з Іраном і ОАЕ на постачання сирової нафти танкерами. Оскільки обсяг видобутку нафти квотується рішеннями ОПЕК (Організація країн — експортерів нафти), компанія розраховує, що не менш 40% нафти вона буде одержувати з Ірану, а іншу — з Арабських Еміратів. OilCo також прогнозує, що в найближчі 10 років попит на її продукцію і квоти на сиру нафту залишаться незмінними.

Нафта, що поставляється з Ірану й ОАЕ, відрізняється своїми якостями. З однієї барелі іранської нафти можна зробити 0,2 бареля дизельного палива, 0,25 бареля бензину, 0,1 бареля мастильних матеріалів і 0,15 бареля авіаційного палива. Відповідні числа для нафти з ОАЕ складають 0,1, 0,6, 0,15 і 0,1.

Компанії OilCo необхідно визначити мінімальне завантаження сировою нафтою свого нового нафтопереробного заводу.

Задача 7

Біржовий маклер хоче вкласти в акції деяку суму грошей для того, щоб під кінець року мати не менш 10 тис. дол. Існує два типи акцій, у які варто робити вкладення: акції надійних компаній з мінімальним ризиком (так звані "блакитні фішки"), що приносять у середньому 10% річних, і акції компаній, що займаються високими технологіями. Останні акції мають більш високу прибутковість — у середньому 25% річних, однак вони значно більш ризикові. Тому маклер вирішив вкладати в них не більш 60% коштів. На яку суму і які акції треба придбати маклерові, щоб досягти бажаної мети?

Задача 8

Магазин У&До продає два види безалкогольних напоїв: колові А1 відомого виробника і колу В&До власного виробництва. Доход від однієї банки коли А1 складає 5 центів, тоді як доход від однієї банки власної коли — 7 центів. У середньому магазин за день продає не більш 500 банок обох напоїв. Незважаючи на те що А1 — відома торговельна марка, покупці краще купують колу В&ДО, оскільки вона значно дешевше.

Підраховано, що обсяги продажів коли В&К и А1 (у натуральному вирахованні) повинні співвідноситися не менш 2:1. Крім того, відомо, що магазин продає не менш 100 банок коли

A1 у день. Скільки банок кожного напою повинний мати магазин на початку робочої доби для максимізації доходу?

Задача 9

Завод «Electra» робить два типи електричних двигунів, кожний на окремій складальній лінії. Продуктивність цих ліній складає 600 і 750 двигунів у день. Двигун першого типу використовує 10 одиниць якогось комплектуючого, а двигун другого типу — 8 одиниць цього ж компонента. Постачальник може забезпечити на день 8000 одиниць цих деталей. Прибутковість виготовлення двигуна першого типу складає 600, другого — 400 грн. Визначте оптимальний план щоденного виробництва двигунів.

Задача 10

Фабрика Wild West виготовляє два типи ковбойських капелюхів. Виробництво капелюха першого типу вимагає в два рази більше тимчасових ресурсів, чим виготовлення капелюха другого типу. Якщо фабрика буде виготовляти тільки капелюхи другого типу, то в день вона зможе виготовити 400 таких капелюхів. Ринок накладає обмеження на виробництво капелюхів: не більш 150 капелюхів першого і 200 капелюхів другого типу. Доход від виробництва капелюхів складає 8 дол. на одиницю першого типу і 5 дол. — другого типу. Визначте щоденний план оптимального виробництва капелюхів обох типів.

Задача 11

Компанія виготовляє два види продукції, А та В. Обсяг продажів продукту А складає не менш 80% від загального обсягу продажів продуктів А та В. Разом з тим, компанія не може робити більш 100 одиниць продукту А в день. Для виробництва цих продуктів використовується та сама сировина, надходження якої обмежене 240 фунтами в день. На виготовлення одиниці продукту А витрачається 2 фунти сировини, а одиниці продукту В — 4 фунти. Ціна однієї одиниці продуктів А і В складає 20 і 50 дол. відповідно. Знайдіть оптимальний план виробництва цієї компанії.

Задача 12

Компанія Show&Sell має можливість рекламувати свою продукцію по місцевому радіо і телебаченню. Бюджет на рекламу обмежений сумою 10 000 дол. на місяць. Одна хвилина рекламного часу на радіо коштує 15, а на телебаченні — 300 дол. Компанія припускає, що реклама на радіо за часом повинна перевищувати рекламу на телебаченні не менш чим у два рази. Разом з тим, відомо, що нераціонально використовувати більш 400 хвилин реклами на радіо на місяць. Останні дослідження показали, що реклама на телебаченні в 25 разів ефективніше реклами на радіо. Визначте оптимальний бюджет для реклами на радіо і телебаченні.

Задача 13

Два хлібзаводи забезпечують три райони міста. Завод №1 випікає 30т, №2- 40т хліба. I-й район потребує 10т, II-й район- 40т, III- 20т. Скласти оптимальний план перевезень. Вартість перевезення однієї тони хліба задана в таблиці

	I-й район	II-й район	III-й район
Завод № 1	2	1	5
Завод № 2	4	3	2

Задача 14

Два хлібзаводи забезпечують три райони міста. Завод №1 випікає 20т, №2- 40т хліба.

I-й район потребує 10т, II-й район- 30т, III- 20т. Скласти оптимальний план перевезень. Вартість перевезення однієї тони хліба задана в таблиці

	I-й район	II-й район	III-й район
Завод № 1	1	2	3
Завод № 2	4	3	2

Задача 15

Два хлібзаводи забезпечують три райони міста. Завод №1 випікає 30т, №2- 10т хліба.

I-й район потребує 10т, II-й район- 10т, III- 20т. Скласти оптимальний план перевезень.

Вартість перевезення однієї тони хліба задана в таблиці

	I-й район	II-й район	III-й район
Завод № 1	2	1	5
Завод № 2	4	2	1

Практичне заняття № 2

Тема. Графічний метод розв'язування задачі лінійного програмування.

Мета. Навчитися розв'язувати задачу лінійного програмування графічно..

Контрольні питання

1. Запишіть модель загальної задачі лінійного програмування.
2. Запишіть модель задачі лінійного програмування у стандартній формі.
3. Запишіть модель задачі лінійного програмування у канонічній формі.
4. Яка найбільша розмірність задачі ЛПР, яку можна вирішити графічно?
5. Як перейти від задачі мінімізації цільової функції до задачі її максимізації?
6. Перелічіть основні етапи розв'язання задачі ЛПР графічним способом.
7. Що таке область допустимих розв'язків?

Теоретичні відомості

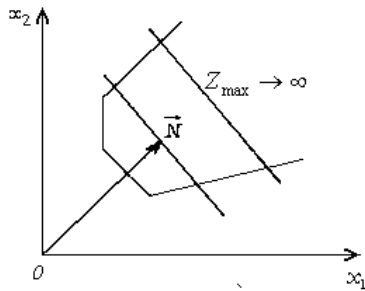
Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Для розв'язування двовимірних задач лінійного програмування застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування. Розглянемо задачу.

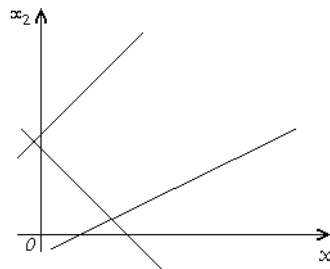
Знайти

$$\max(\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

за умов:

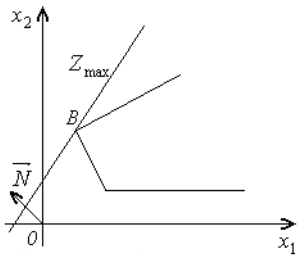


Мал. 3

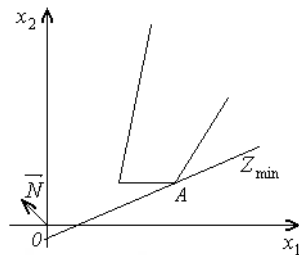


Мал. 4

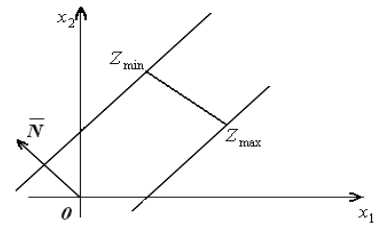
4. Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв'язків (мал. 5 та 6). На мал. 5 у точці B маємо максимум, на мал. 6 у точці A — мінімум, на мал. 7 зображено, як у разі необмеженої області допустимих планів цільова функція може набирати максимального чи мінімального значення у будь-якій точці променя.



Мал. 5



Мал. 6



Мал.7.

Приклад. Розв'язати графічно задачу ЛП

$$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20; \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 30; \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 33; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для побудови прямої лінії необхідно мати дві опорних точки. Будемо шукати ці точки на осях. При цьому отримаємо такі результати:

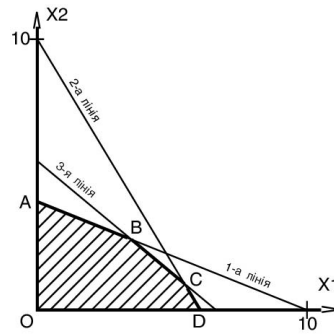
1-а лінія	2-а лінія	3-я лінія
$2x_1 + 5x_2 = 20;$	$5x_1 + 3x_2 = 30;$	$5x_1 + 6x_2 = 33;$
$x_1 = 0; x_2 = 4;$	$x_1 = 0; x_2 = 10;$	$x_1 = 0; x_2 = 5.5;$
$x_1 = 10; x_2 = 0;$	$x_1 = 6; x_2 = 0;$	$x_1 = 6.6; x_2 = 0;$

Знайдемо координати вершин області. Координати вершин O , A , D вже відомі і становлять: $O(0;0)$, $A(0;4)$, $D(6;0)$. Для знаходження координат вершини B необхідно розв'язати систему двох лінійних рівнянь, які відповідають першій і третій лінії:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 20; \\ 5x_1 + 6x_2 = 33. \end{cases}$$

В результаті отримаємо $B(3.46; 2.62)$.

Для знаходження координат вершини C необхідно розв'язати систему двох лінійних рівнянь, які відповідають другій і третій лінії:



$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30; \\ 5x_1 + 6x_2 = 33. \end{cases}$$

В результаті отримуємо $C(5.40; 1.00)$.

Обчислимо значення цільової функції у вершинах симплекса, використовуючи формулу $F(x) = 2x_1 + x_2$. $F(O)=0.00$; $F(A)=4$; $F(B)=9.54$; $F(C)=11.8$; $F(D)=12.00$.

Отже оптимальний розв'язок відповідає вершині **D** симплекса і має вигляд:

$$x_1 = 6; \quad x_2 = 0. \quad F_{\max} = 12.00$$

Завдання для самостійного виконання

Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом

Варіант 1

$$x_1 \leq 4; \quad x_2 \leq 10, \quad x_i \geq 0$$

$$z = 3x_1 + 5x_2 + 10 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + x_2 \leq 10;$$

$$x_1 \leq 6;$$

$$x_2 \leq 8, \quad x_i \geq 0.$$

Варіант 2

$$z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 4;$$

$$x_1 + x_2 \leq 6;$$

$$x_2 \leq 2, \quad x_i \geq 0.$$

Варіант 3

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + x_2 \leq 10;$$

$$3x_1 + x_2 \leq 14;$$

$$x_1 \leq 4; \quad x_2 \leq 10, \quad x_i \geq 0$$

Варіант 4

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + x_2 \leq 10;$$

$$3x_1 + x_2 \leq 14;$$

Варіант 5

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + x_2 \leq 10;$$

$$3x_1 + x_2 \leq 14;$$

$$x_1 \leq 4; \quad x_2 \leq 10, \quad x_i \geq 0$$

Варіант 6

$$z = 3x_1 + 5x_2 + 10 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + x_2 \leq 10;$$

$$x_1 \leq 6;$$

$$x_2 \leq 8, \quad x_i \geq 0.$$

Варіант 7

$$z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 4;$$

$$x_1 + x_2 \leq 6;$$

$$x_2 \leq 2, \quad x_i \geq 0.$$

Варіант 8

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + x_2 \leq 10;$$

$$3x_1 + x_2 \leq 14;$$

$$x_1 \leq 4; x_2 \leq 10, x_i \geq 0$$

Варіант 10

Варіант 9

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 + x_2 \leq 10;$$

$$3x_1 + x_2 \leq 14;$$

$$x_1 \leq 4; x_2 \leq 10, x_i \geq 0$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max ;$$

$$x_1 + x_2 \leq 10;$$

$$3x_1 + x_2 \leq 14;$$

$$x_1 \leq 4; x_2 \leq 10, x_i \geq 0$$

Практичне заняття № 3

Тема. Симплекс-метод розв'язування задачі лінійного програмування.

Мета. Навчитися розв'язувати задачу лінійного програмування симплекс-методом.

Контрольні питання

1. Базисні та вільні змінні в симплекс методі.
2. Як вибирається розв'язувальний стовпчик?

Теоретичні відомості

Приклад. Розв'язати задачу ЛП симплекс-методом.

$$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20; \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 30; \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 33; \end{cases} \quad x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

Запишемо задачу в канонічній формі. Введемо нові невід'ємні змінні $x_3, x_4, x_5 \geq 0$. Отримаємо систему недоозначених рівнянь (3 рівняння, 5 невідомих).

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20; \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 30; \\ 5x_1 + 6x_2 + x_5 = 33; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0; \quad x_5 \geq 0.$$

$$F = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \max$$

Складаємо симплекс – таблицю

Базис	C_i	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
			2	1	0	0	0
P_3	0	20	2	5	1	0	0
P_4	0	30	5	3	0	1	0
P_5	0	33	5	6	0	0	1
Δj		0	-2	-1	0	0	0

Тут Δj - оцінка невідомого x_j
$$\Delta j = \sum_{i \in B} a_{ij} c_i - c_j$$

Вибір розв'язуючого елемента

1. Розв'язуючий елемент повинен бути додатнім!
2. Розв'язуючий стовпець P_1 знаходимо з умови $\min \Delta j$. $\min (-2; -1) = -2$.
3. Розв'язуючий рядок – P_4 знаходимо з умови $\min (P_0/a_{ij})$, тут i – номер розв'язуючого рядка. $\min (20/2; 30/5; 33/5) = 30/5$.
4. Вектор P_4 виходить з базису, Вектор P_1 входить у базис.
5. Розв'язуючий елемент – число 5 – знаходиться на перетині розв'язуючого рядка P_4 і розв'язуючого стовпця P_1 .

Алгоритм звичайного симплекс-методу

1. Розв'язуючий рядок P_4 ділимо на розв'язуючий елемент – число 5;
2. Базисні стовпці P_1 , P_3 і P_5 повинні бути одиничними векторами;
3. Усі інші елементи таблиці (стовпці P_0 , P_2 , P_4 крім рядка P_4) перераховуються згідно правила прямокутника:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik} * a_{lj}}{a_{kl}}$$

Тут a_{lk} – розв'язуючий елемент; a_{ij} – елемент, який перераховується.

Базис	C_i	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
			2	1	0	0	0
P_3	0	8	0	3.8	1	-0.4	0
P_1	2	6	1	0.6	0	0.2	0
P_5	0	3	0	3	0	-1	1
Δj		12	0	0.2	0	0.4	0

4. Оскільки всі $\Delta j \geq 0$, отримано оптимальний розв'язок задачі. Оптимальні значення параметрів x_3 , x_1 і x_5 знаходимо у стовпчику P_0 . Невідомі x_2 і x_4 яких немає у базисі є вільними і дорівнюють нулю. Якби серед оцінок були б від'ємні, довелось би будувати ще одну симплекс таблицю

Відповідь. $x_1 = 6$; $x_2 = 0$; $x_3 = 8$; $x_4 = 0$; $x_5 = 3$; $F_{\max} = 12$

Завдання для самостійного виконання

Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом

1. $z = 12x_1 + 3x_2 + 20$; $5x_1 + 2x_2 \geq 20$; $x_1 + 2x_2 \geq 14$; $2x_1 - 2x_2 \leq 6$.	2. $z = 7x_1 + 3x_2 + 30$; $10x_1 + 9x_2 \leq 90$; $-x_1 + 2x_2 \leq 6$; $6x_1 + 5x_2 \leq 30$.	3. $z = -4x_1 - 3x_2 + 20$; $4x_1 + 5x_2 \leq 20$; $7x_1 + 3x_2 \leq 21$; $2x_1 + x_2 \geq 2$.
4. $z = -7x_1 - 4x_2 + 15$; $3x_1 - 2x_2 \leq 12$; $3x_1 + 2x_2 \geq 6$; $-x_1 + 2x_2 \leq 4$.	5. $z = 2x_1 + 5x_2 + 12$; $6x_1 + 5x_2 \geq 30$; $3x_1 - 2x_2 \leq 12$; $-3x_1 + 6x_2 \leq 12$.	6. $z = 6x_1 + 4x_2 + 20$; $2x_1 + x_2 \geq 4$; $x_1 + 2x_2 \geq 4$; $-x_1 + x_2 \leq 5$.
7. $z = -5x_1 - 2x_2 + 20$; $4x_1 + x_2 \leq 24$; $x_1 + x_2 \geq 2$; $x_1 - 2x_2 \leq 2$; $-2x_1 + 3x_2 \leq 6$.	8. $z = 4x_1 + 2x_2 + 15$; $x_1 - 2x_2 \leq 4$; $3x_1 + 2x_2 \geq 6$; $9x_1 + 8x_2 \leq 72$; $-x_1 + 2x_2 \leq 5$.	9. $z = -3x_1 - 4x_2 - 12$; $-4x_1 + 3x_2 \leq 12$; $x_1 - 2x_2 \leq 4$; $6x_1 + 7x_2 \geq 42$.
10. $z = -5x_1 + 3x_2 + 10$; $3x_1 + 2x_2 \leq 18$; $5x_1 + 2x_2 \geq 10$; $-x_1 + x_2 \leq 3$; $x_1 + 2x_2 \leq 4$.	11. $z = 4x_1 + 6x_2 + 20$; $-3x_1 + 2x_2 < 6$; $x_1 + x_2 < 8$; $3x_1 - 2x_2 < 6$; $x_2 \geq 1$.	12. $z = 3x_1 + 4x_2 + 10$; $3x_1 + x_2 \geq 6$; $2x_1 + 5x_2 \geq 10$; $2x_1 + 3x_2 \leq 6$; $x_1 \leq 4$.
13. $z = 4x_1 + 2x_2 + 20$; $-x_1 + 2x_2 \leq 6$; $x_1 + 2x_2 \geq 4$; $7x_1 + 8x_2 \leq 56$; $x_1 - x_2 \leq 5$.	14. $z = 2x_1 - 2x_2 + 15$; $3x_1 + 4x_2 \geq 12$; $4x_1 + 3x_2 \geq 12$; $x_1 + 2x_2 \leq 8$; $x_1 \leq 6$.	15. $z = 3x_1 + 2x_2 - 10$; $2x_1 - x_2 \geq 0$; $2x_1 + 3x_2 \geq 6$; $x_1 - 2x_2 \leq 4$.
16. $z = 2x_1 + 3x_2 + 16$; $2x_1 - 5x_2 \leq 10$; $-2x_1 + 5x_2 \leq 10$; $2x_1 + 3x_2 \geq 12$.	17. $z = 4x_1 + 3x_2 + 5$; $x_1 - x_2 \geq 0$; $x_1 + 3x_2 \geq 6$; $2x_1 - 3x_2 \leq 21$.	18. $z = 4x_1 + 6x_2 + 6$; $2x_1 - 3x_2 \leq 12$; $-x_1 + 2x_2 \leq 8$; $3x_1 + 2x_2 \geq 24$.
19. $z = 2x_1 + 5x_2 + 12$; $-x_1 - x_2 \leq 3$; $x_1 - 3x_2 \leq 0$; $3x_1 + 2x_2 \leq 24$.	20. $z = 4x_1 + 3x_2 + 10$; $x_1 + 3x_2 \geq 6$; $-3x_1 + x_2 \leq 9$; $x_1 - x_2 \leq 3$.	21. $z = 3x_1 + 4x_2 + 8$; $x_1 - 3x_2 \leq 0$; $2x_1 + x_2 \geq 6$; $x_1 + x_2 \leq 10$; $-x_1 + x_2 \leq 3$.
22. $z = -3x_1 - 2x_2 + 15$; $x_1 - 4x_2 \leq 0$; $-3x_1 + x_2 \leq 3$; $6x_1 + 5x_2 \geq 30$.	23. $z = 5x_1 + 2x_2 + 10$; $5x_1 + 2x_2 \geq 10$; $2x_1 - 3x_2 \leq 6$; $x_1 + 2x_2 \geq 15$; $7x_1 + 6x_2 \leq 42$.	24. $z = -2x_1 + 3x_2 + 16$; $5x_1 - 2x_2 \leq 10$; $x_1 + x_2 \leq 3$; $4x_1 + 3x_2 \geq 12$.

3. Напрямок оптимізації цільової функції двоїстої задачі змінити на протилежний стосовно основної задачі (якщо було на максимум, то стане на мінімум, і навпаки).

4. Із кожного стовпчика коефіцієнтів a_{ij} початкової системи нерівностей сформуувати рядок обмежень двоїстої задачі шляхом скалярного множення вектора двоїстих змінних y_i ($i = 1, 2, \dots, m$) на стовпчик коефіцієнтів a_{ij} початкової системи нерівностей.

5. Знак у кожній нерівності замінити на протилежний стосовно нерівностей початкової задачі.

6. Коефіцієнти c_j ($j = 1, 2, \dots, n$) при змінних x_j у цільовій функції початкової задачі зробити вільними членами у відповідних нерівностях двоїстої задачі.

Відзначимо, що матриці систем основних обмежень прямої і двоїстої задач є взаємно транспонованими.

Приклад. Скласти двоїсту задачу для прямої задачі лінійного програмування:

$$P(X) = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \rightarrow \max;$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 < 9;$$

$$1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 < 14;$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0.$$

Відповідь $S(Y) = 9 \cdot y_1 + 14 \cdot y_2 \rightarrow \min;$

$$3 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 > 1;$$

$$2 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 > 2;$$

$$1 \cdot y_1 + 10 \cdot y_2 > 3;$$

$$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0.$$

Завдання для самостійного виконання

Записати двоїсту задачу до задачі лінійного програмування з практичної роботи №3.

Практичне заняття № 5

Тема. Розв'язування задачі лінійного програмування в MS EXCEL.

Мета. Навчитися розв'язувати задачу лінійного програмування з допомогою програми MS EXCEL.

Контрольні питання

1. Ввід даних задачі в MS EXCEL.

Теоретичні відомості

Розв'язати задачу лінійного програмування в MS Excel

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 \rightarrow \max ;$$

$$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 24,$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \leq 3,$$

$$x_1 - 4x_2 + 3x_4 \leq 6,$$

$$x_2 + x_3 \leq 6; x_i \geq 0$$

В MS Excel задача записується в такому вигляді

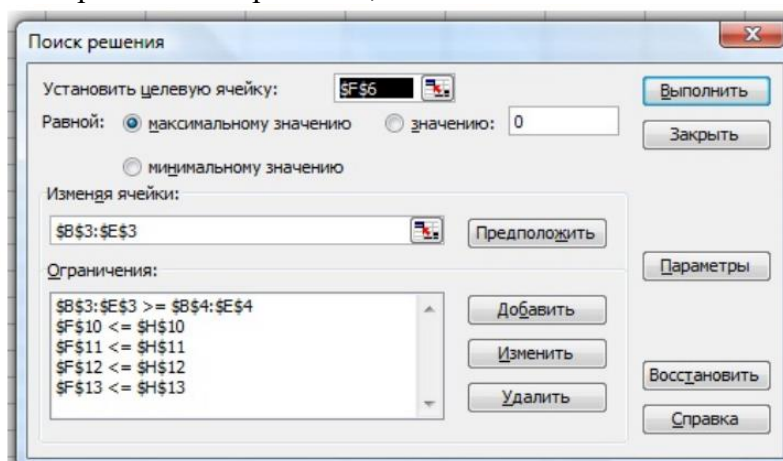
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1			Змінні						
2	Назва	x1	x2	x3	x4				
3	Значення								
4	нижня гр		0	0	0	0			
5		Значення коефіцієнтів					відповідь	напрям	
6			3	5	-4	-3		максимум	
7									
8		Обмеження							
9		Коефіцієнти лівої частини					Ліва част	знак	Праві част
10	Обмеж 1		-1	3	-4	0	<=	24	
11	Обмеж 2		2	1	-1	-3	<=	3	
12	Обмеж 3		1	-4	0	3	<=	6	
13	Обмеж 4		0	1	1	0	<=	6	

1. В клітинку F6 потрібно ввести цільову функцію $3x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4$:
 = СУММПРОИЗВ(B\$3 : E\$3; B6 : E6).

2. Заповнити колонку «Ліві частини», для цього в клітинку F10 вводимо перше обмеження: викликаємо функцію СУММПРОИЗВ, в полі Масив1 виділяємо мишею клітинки B3-E3, в полі масив2 виділяємо клітинки B10-E10. Так само заповнюємо клітинки F11- F13.

3. Вибираємо в меню Сервіс- Надстройки і вмикаємо Поиск решения.

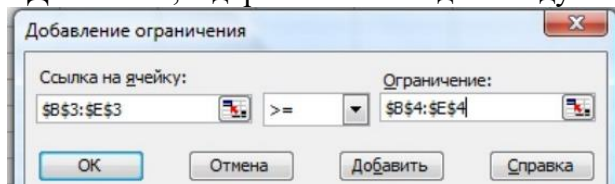
4. Вибираємо в меню Сервіс –поиск решения, заповнюємо вікно:



Поставте курсор в поле «Установить целевую ячейку» і виділіть клітинку F6;

Поставте курсор в поле «Изменяя ячейки» і виділіть клітинки B3- E3;

Натисніть кнопку «Добавить», відкриється вікно для вводу обмежень:



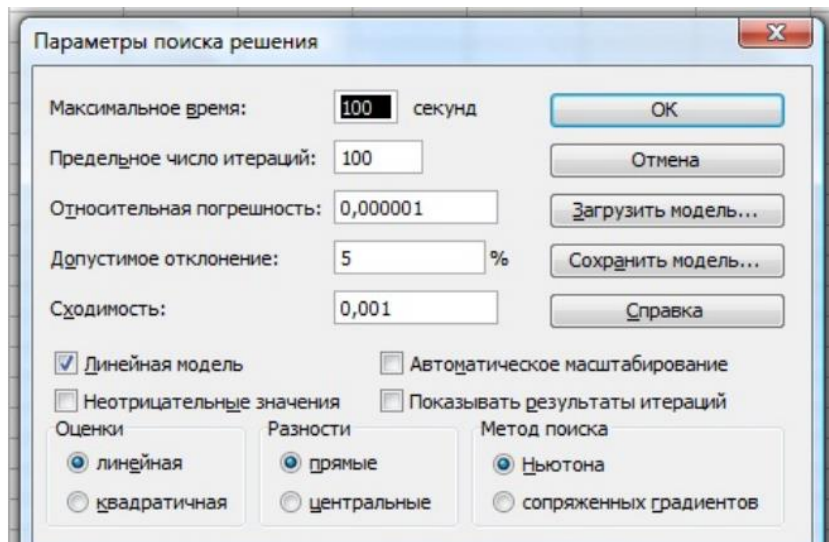
Вводимо умову, що всі змінні невідемні: Поставте курсор в поле «Ссылка на ячейку» і мишею виділіть клітинки В3-Е3, у другому полі виберіть знак >=, в третьому полі мишею виділіть клітинки В4-Е4.

Натисніть кнопку «Добавить» і введіть перше обмеження: Поставте курсор в поле «Ссылка на ячейку» і мишею виділіть клітинку F10, у другому полі виберіть знак <=, в третьому полі мишею виділіть клітинку H10.

Так само введіть інші обмеження.

5. Після вводу всіх обмежень у вікні вибираємо кнопку «Параметры»

І заповнюємо вікно



6. У вікні «Поиск решения» натискаємо «Виполнить».

7. Результуюче значення змінних буде у клітинках В3-Е3. максимальне значення функції у клітинці F10.

Завдання для самостійного виконання

Розв'язати задачу лінійного програмування в MS Excel

Вар.	ЦФ	Обмеження	Вар.	ЦФ	Обмеження
1	$Z=9x_1+10x_2+16x_3$	$18x_1+15x_2+12x_3 \leq 360$ $6x_1+4x_2+8x_3 \leq 192$ $-10x_1+3x_2+3x_3 \leq 30$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$	9	$Z=15x_1+25x_2+35x_3$	$30x_1+40x_2-50x_3 \leq 70$ $10x_1-20x_2+20x_3 \leq 30$ $-20x_1+30x_2+40x_3 \leq 50$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
2	$Z=7x_1+12x_2+14x_3$	$28x_1+25x_2+22x_3 \leq 560$ $4x_1-40x_2+6x_3 \leq 100$ $-10x_1+30x_2+5x_3 \leq 50$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$	10	$Z=10x_1+5x_2+45x_3$	$30x_1+40x_2-50x_3 \leq 70$ $10x_1-20x_2+20x_3 \leq 30$ $-20x_1+30x_2+40x_3 \leq 50$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
3	$Z=2x_1+3x_2+4x_3$	$-5x_1+6x_2+7x_3 \leq 20$ $8x_1-9x_2+10x_3 \leq 30$ $11x_1+12x_2-13x_3 \leq 40$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$	11	$Z=5x_1+5x_2+5x_3$	$20x_1+20x_2-20x_3 \leq 120$ $30x_1-30x_2+30x_3 \leq 80$ $-40x_1+40x_2+40x_3 \leq 90$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
4	$Z=3x_1+4x_2+2x_3$	$15x_1-16x_2+17x_3 \leq 120$ $-18x_1+19x_2+20x_3 \leq 130$ $21x_1+22x_2-23x_3 \leq 140$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$	12	$Z=12x_1+12x_2+12x_3$	$12x_1+13x_2-14x_3 \leq 12$ $24x_1-25x_2+24x_3 \leq 24$ $-48x_1+48x_2+49x_3 \leq 48$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
5	$Z=3x_1+4x_2+2x_3$	$15x_1+16x_2-17x_3 \leq 120$ $18x_1-19x_2+20x_3 \leq 130$ $-21x_1+22x_2+23x_3 \leq 140$	13	$Z=13x_1+12x_2+14x_3$	$13x_1+18x_2-19x_3 \leq 120$ $24x_1-25x_2+24x_3 \leq 240$ $-48x_1+30x_2+49x_3 \leq 480$

		$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$			$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
6	$Z=7x_1+12x_2+14x_3$	$48x_1+25x_2+22x_3 \leq 500$ $4x_1-20x_2+6x_3 \leq 20$ $-10x_1+10x_2+5x_3 \leq 50$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$	14	$Z=14x_1+12x_2+14x_3$	$14x_1+18x_2-19x_3 \leq 150$ $21x_1-25x_2+24x_3 \leq 240$ $-48x_1+30x_2+56x_3 \leq 180$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
7	$Z=8x_1+11x_2+15x_3$	$50x_1+26x_2-20x_3 \leq 30$ $4x_1-20x_2+6x_3 \leq 20$ $-10x_1+10x_2+5x_3 \leq 50$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$	15	$Z=15x_1+12x_2+14x_3$	$15x_1+18x_2-31x_3 \leq 150$ $21x_1-25x_2+28x_3 \leq 24$ $-48x_1+30x_2+56x_3 \leq 18$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$
8	$Z=10x_1+20x_2+30x_3$	$-30x_1+40x_2+50x_3 \leq 70$ $10x_1-20x_2+20x_3 \leq 30$ $20x_1+30x_2-40x_3 \leq 50$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$	16	$Z=16x_1+22x_2+11x_3$	$18x_1+2x_2-20x_3 \leq 204$ $16x_1-2x_2+77x_3 \leq 31$ $-48x_1+10x_2+11x_3 \leq 204$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

Практичне заняття № 6

Тема. Розв’язання задач оптимізації за допомогою Microsoft Excel. Задача про розподіл ресурсів.

Мета. Навчитися розв’язувати задачу лінійного програмування з допомогою програми MS EXCEL.

Контрольні питання

1. Що розуміють під терміном "лінійне програмування"?
2. Форма запису задач лінійного програмування.
3. Як викликати інструмент "Пошук розв’язання"?
4. Як задати обмеження за їх наявності в інструменті "Пошук розв’язання"?
5. Які основні вкладки має інструмент "Пошук розв’язання"?
6. Як задати цільову функцію в інструменті "Пошук розв’язання"?
7. Використання звітів засобу "Пошук розв’язання".

Теоретичні відомості

Приклад Підприємство випускає два види продукції П1 і П2 і використовує для цього три типи сировини - С1, С2 і С3. Запаси сировини обмежені. Відомі затрати кожного типу сировини на одну одиницю кожного виду продукції, собівартість та ціна реалізації однієї одиниці кожного виду продукції.

Побудувати математичну модель задачі та знайти оптимальний план випуску продукції:

- а) щоб прибуток був максимальним;
- б) щоб обсяг продукції у грошовому виразі був максимальним;

Вид сировини	Витрати сировини на 1 одиницю продукції		Запаси сировини
	П1	П2	
С1	12	3	684

C2	10	5	690
C3	3	6	558
Ціна реалізації, грн	28	16	
Собівартість, грн	22	14	

Розв'язання

а) Будуємо математичну модель задачі, яка складається з такого:

- цільової функції, яка містить значення прибутку від реалізації всієї продукції;
- обмежень на витрати сировини та значення параметрів.

Позначаємо через x_i обсяг випуску i -ї продукції. Прибуток дорівнює різниці між ціною реалізації та собівартістю. Тоді цільова функція матиме вигляд

$$(28 - 22)x_1 + (16 - 14)x_2 \rightarrow \max, \quad \text{або} \quad 16x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

Обмеження на ресурси будуємо з умови, що їх витрати не повинні перевищувати запасів, а значення параметрів повинні бути невід'ємними:

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 \leq 684, \\ 10x_1 + 5x_2 \leq 690, \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 558, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Завантажуємо програму Excel та заносимо вхідні дані у такому вигляді:

	A	B	C	D
1	Ресурси	Затрати сировини на 1 од. продукції		Запаси сировини
2	C1	12	3	684
3	C2	10	5	690
4	C3	3	6	558
5	Ціна реалізації, грн	28	16	
6	Собівартість, грн	22	14	

Клітинки B9, C9 резервуємо під кінцевий результат (значення x_i). Для розв'язання задачі за допомогою опції "Поиск решения" вносимо до таблиці відповідні формули для цільової функції (клітинка D9):

$$=(B5-B6) \cdot B9 + (C5-C6) \cdot C9$$

та витрат ресурсів (E2:E4):

$$\begin{aligned} &=B2 \cdot \$B\$9 + C2 \cdot \$C\$9, \\ &=B3 \cdot \$B\$9 + C3 \cdot \$C\$9, \\ &=B4 \cdot \$B\$9 + C4 \cdot \$C\$9. \end{aligned}$$

Таблиця набере такого вигляду:

	A	B	C	D	E
1	Ресурси	Затрати сировини на 1 од. продукції		Запаси сировини	Витрати сировини
2	C1	12	3	684	0
3	C2	10	5	690	0
4	C3	3	6	558	0
5	Ціна реалізації, грн	28	16		
6	Собівартість, грн	22	14		
7					
8		x1	x2	z	
9				0	

Завдання для самостійного виконання

Підприємство випускає два види продукції П1 і П2 і використовує для цього три типи сировини - С1, С2 і С3. Запаси сировини обмежені. Відомі затрати кожного типу сировини на одну одиницю кожного виду продукції, собівартість та ціна реалізації однієї одиниці кожного виду продукції. Побудувати математичну модель задачі та знайти оптимальний план випуску продукції:

- а) щоб прибуток був максимальним;
- б) щоб обсяг продукції у грошовому виразі був максимальним.

1 Вид сировини	Витрати сировини на 1 одиницю продукції		Запаси сировини
	П1	П2	
С1	12	3	684
С2	10	5	690
С3	3	6	558
Ціна реалізації, грн	28	16	
Собівартість, грн	22	14	

2 Вид сировини	Витрати сировини на 1 одиницю продукції		Запаси сировини
	П1	П2	
С1	12	3	684
С2	10	5	690
С3	3	6	558
Ціна реалізації, грн	28	16	
Собівартість, грн	22	14	

3 Вид сировини	Витрати сировини на 1 одиницю продукції		Запаси сировини
	П1	П2	
С1	12	3	684
С2	10	5	690
С3	3	6	558
Ціна реалізації, грн	28	16	
Собівартість, грн	22	14	

4 Вид сировини	Витрати сировини на 1 одиницю продукції		Запаси сировини
	П1	П2	
С1	12	3	684
С2	10	5	690
С3	3	6	558
Ціна реалізації, грн	28	16	
Собівартість, грн	22	14	

5 Вид сировини	Витрати сировини на 1 одиницю продукції		Запаси сировини
	П1	П2	
С1	12	3	684
С2	10	5	690
С3	3	6	558
Ціна реалізації, грн	28	16	
Собівартість, грн	22	14	

6 Вид сировини	Витрати сировини на 1 одиницю продукції		Запаси сировини
	П1	П2	
С1	12	3	684
С2	10	5	690
С3	3	6	558
Ціна реалізації, грн	28	16	
Собівартість, грн	22	14	

7 Вид сировини	Витрати сировини на 1 одиницю продукції		Запаси сировини
	П1	П2	
С1	12	3	684
С2	10	5	690
С3	3	6	558
Ціна реалізації, грн	28	16	
Собівартість, грн	22	14	

8 Вид сировини	Витрати сировини на 1 одиницю продукції		Запаси сировини
	П1	П2	
С1	12	3	684
С2	10	5	690
С3	3	6	558
Ціна реалізації, грн	28	16	
Собівартість, грн	22	14	

9 Вид сировини	Витрати сировини на 1 одиницю продукції		Запаси сировини
	П1	П2	
С1	12	3	684
С2	10	5	690
С3	3	6	558
Ціна реалізації, грн	28	16	
Собівартість, грн	22	14	

10 Вид сировини	Витрати сировини на 1 одиницю продукції		Запаси сировини
	П1	П2	
С1	12	3	684
С2	10	5	690
С3	3	6	558
Ціна реалізації, грн	28	16	
Собівартість, грн	22	14	

Практичне заняття № 7

Тема. Транспортна задача лінійного програмування.
Побудова опорного плану.

Мета. Навчитися знаходити опорний план транспортної задачі.

Контрольні питання

1. Що таке опорний план транспортної ?
2. Суть методу північно-західного кута.
3. Суть методу найменшої вартості.

Теоретичні відомості

Математична модель транспортної задачі

Позначимо x_{ij} – кількість одиниць, які планується перевезти від i – го постачальника до j – го споживача. Оскільки всі вантажі повинні бути вивезені, то мають місце такі рівності:

$$\sum_j x_{ij} = a_i \quad (i = 1, m)$$

Оскільки всі потреби споживачів повинні бути задоволені, то мають місце такі рівності:

$$\sum_i x_{ij} = b_j \quad (j = 1, n)$$

Оскільки вантажі перевозяться лише в одну сторону, очевидно, що:

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, m; j = 1, n)$$

Загальна вартість перевезення вважається пропорційною до кількості перевезених вантажів та відстані від постачальника до споживача і повинна бути мінімальною:

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

Якщо виконується умова $\sum_i a_i = \sum_j b_j$, задача називається закритою.

Приклад. Скласти опорний план для транспортної задачі

	<i>B1</i>	<i>B2</i>	<i>B3</i>	<i>B4</i>	<i>B5</i>	<i>Запаси</i>
A1	4	3	2	2	4	140
A2	1	4	8	4	1	180
A3	9	7	3	7	2	160

Потреби	60	70	120	130	100	480
---------	----	----	-----	-----	-----	-----

Метод північно – західного кута

	<i>B1</i>	<i>B2</i>	<i>B3</i>	<i>B4</i>	<i>B5</i>	Запаси
A1	4 60	3 70	2 10	2	4	140
A2	1	4	8 110	4 70	1	180
A3	9	7	3	7 60	2 100	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

$$F = 60 \cdot 4 + 70 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 110 \cdot 8 + 70 \cdot 4 + 60 \cdot 7 + 100 \cdot 2 =$$

$$240 + 210 + 20 + 880 + 280 + 420 + 200 = 2250 \text{ – вартість перевезень}$$

Метод мінімального тарифа

	<i>B1</i>	<i>B2</i>	<i>B3</i>	<i>B4</i>	<i>B5</i>	Запаси
A1	4	3	2 10	2 130	4	140
A2	1 60	4 20	8	4	1 100	180
A3	9	7 50	3 110	7	2	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

$$F = 10 \cdot 2 + 130 \cdot 2 + 60 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 100 \cdot 1 + 50 \cdot 7 + 110 \cdot 3 =$$

$$20 + 260 + 60 + 80 + 100 + 350 + 330 = 1200 \text{ – вартість перевезень}$$

Завдання для самостійного виконання

Із m пунктів необхідно перевезти вантаж для n споживачів. У кожному із пунктів відправлення є відповідно A_i ($i=1,2,\dots,m$) одиниць вантажу. Потреби кожного із споживачів відповідно B_j ($j=1,2,\dots,n$) одиниць. Затрати на перевезення одиниці вантажу від i -го постачальника до j -го споживача задані матрицею C_{ij} ($i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$).

Побудувати математичну модель задачі та знайти опорний план перевезень методом північно-західного кута та методом мінімальної вартості. При цьому попит усіх споживачів повинен бути задоволений, і весь вантаж вивезений.

1						
Cij						A _i
	14	10	2	5	10	50
	11	5	4	11	3	20
	9	8	12	1	18	30
	1	4	9	17	18	40
B _j	15	30	65	20	10	

2						
Cij						A _i
	16	1	10	16	12	10
	12	13	7	10	14	70
	1	19	14	13	3	60
	13	8	15	8	19	30
B _j	40	40	60	25	15	

3						
Cij						A _i
	7	19	7	12	18	80
	17	11	7	13	11	12
	1	13	19	18	12	38
	18	4	11	3	11	45
B _j	75	10	20	40	30	

4						
Cij						A _i
	10	16	3	8	15	14
	3	14	12	9	1	25
	2	20	4	11	5	56
	7	17	13	8	15	45
B _j	40	40	20	10	30	

5						
Cij						A _i
	10	9	12	7	1	30
	16	4	9	19	10	70
	20	17	11	1	12	50
	13	14	15	7	8	20
B _j	35	30	35	45	25	

6						
Cij						A _i
	5	19	12	5	9	50
	17	20	11	10	9	20
	2	15	12	13	6	10
	18	3	8	5	14	30
B _j	5	15	35	15	40	

7						
Cij						A _i
	5	3	20	7	25	10
	8	12	6	12	5	48
	3	1	12	2	19	27
	6	3	3	1	18	46
B _j	30	33	38	21	22	

8						
Cij						A _i
	16	12	3	9	10	15
	4	16	1	11	10	17
	19	10	18	20	19	23
	12	4	11	18	19	75
B _j	30	27	16	33	24	

9						
Cij						A _i
	6	12	5	3	11	75
	13	16	9	7	12	30
	17	1	16	15	5	20
	20	19	18	7	18	65
B _j	25	70	35	20	40	

10						
Cij						A _i
	4	2	5	13	11	85
	13	6	9	7	12	30
	17	1	16	15	5	20
	20	11	18	7	10	65
B _j	35	70	35	20	40	

11						
Cij						A _i
	14	10	2	5	10	50
	11	5	4	11	3	20
	9	8	12	1	18	30
	1	4	9	17	18	40
B _j	15	30	65	20	10	

12						
Cij						A _i
	16	1	10	16	12	10
	12	13	7	10	14	70
	1	19	14	13	3	60
	13	8	15	8	19	30
B _j	40	40	60	25	15	

13						
Cij						A _i
	7	19	7	12	18	80
	17	11	7	13	11	12
	1	13	19	18	12	38
	18	4	11	3	11	45
B _j	75	10	20	40	30	

14						
Cij						A _i
	10	16	3	8	15	14
	3	14	12	9	1	25
	2	20	4	11	5	56
	7	17	13	8	15	45
B _j	40	40	20	10	30	

15						
Cij						A _i
	10	9	12	7	1	30
	16	4	9	19	10	70
	20	17	11	1	12	50
	13	14	15	7	8	20
B _j	35	30	35	45	25	

16						
Cij						A _i
	5	19	12	5	9	50
	17	20	11	10	9	20
	2	15	12	13	6	10
	18	3	8	5	14	30
B _j	5	15	35	15	40	

17						
Cij						A _i
	5	3	20	7	25	10
	8	12	6	12	5	48
	3	1	12	2	19	27
	6	3	3	1	18	46
B _j	30	33	38	21	22	

18						
Cij						A _i
	16	12	3	9	10	15
	4	16	1	11	10	17
	19	10	18	20	19	23
	12	4	11	18	19	75
B _j	30	27	16	33	24	

19						
Cij						A _i
	6	12	5	3	11	75
	13	16	9	7	12	30
	17	1	16	15	5	20
	20	19	18	7	18	65
B _j	25	70	35	20	40	

20						
Cij						A _i
	4	2	5	13	11	85
	13	6	9	7	12	30
	17	1	16	15	5	20
	20	11	18	7	10	65
B _j	35	70	35	20	40	

Практичне заняття № 8

Тема. Знаходження оптимального розв'язку транспортної задачі методом потенціалів.

Мета. Навчитися розв'язувати транспортну задачу методом потенціалів.

Контрольні питання

1. Як обчислюється потенціал базової та вільної клітинки?
2. Як здійснюється зміна базису?

Теоретичні відомості

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів:

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита). За необхідності слід звести задачу до закритого типу.
2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі одним з відомих методів.
3. Перевірка опорного плану задачі на виродженість. За необхідності вводять нульові постачання.
4. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.
 - 4.1. Визначення потенціалів для кожного рядка і стовпчика таблиці транспортної

задачі. Потенціали опорного плану визначають із системи рівнянь $u_i + v_i = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці, кількість яких дорівнює $m+n-1$, а кількість невідомих - $(m+n)$. Кількість рівнянь на одне менша, ніж невідомих, тому система є невизначеною, і одному з потенціалів надають нульове значення. Після цього всі інші потенціали розраховують однозначно.

4.2. Перевірка виконання умови оптимальності для пустих клітин. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i + v_i \leq c_{ij}$ для незаповнених клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітини ця умова не виконується, тобто $u_i + v_i > c_{ij}$, то поточний план є неоптимальним, і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

4.3. Вибір змінної для введення в базис на наступному кроці. Загальне правило переходу від одного опорного плану до іншого полягає в тому, що з попереднього базису виводять певну змінну (вектор), а на її місце вводять іншу змінну (вектор), яка має покращити значення цільової функції. Аналогічна операція здійснюється і в алгоритмі методу потенціалів.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок кілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто $\max \{ \Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij} \}$.

4.4. Побудова циклу і перехід до наступного опорного плану. Вибрана порожня клітина разом з іншими заповненими становить $m+n$, отже, з цих клітин обов'язково утвориться цикл. У межах даного циклу здійснюють перерахування, які приводять до перерозподілу постачань продукції. Кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці - знак «+», а всім іншим — за черговістю знаки «-» та «+». У клітинках зі знаком «-» вибирають значення $\theta = \min x_{ij}$ і переносять його у порожню клітинку. Одночасно це число додають до відповідних чисел, які містяться в клітинках зі знаком «+», та віднімають від чисел, що позначені знаком «-». Якщо значенню θ відповідає кілька однакових перевезень, то при відніманні залишаємо у відповідних клітинках нульові величини перевезень у такій кількості, що дає змогу зберегти невиродженість опорного плану.

5. Перевірка умови оптимальності наступного опорного плану. Якщо умова оптимальності виконується — маємо оптимальний план задачі, інакше необхідно перейти до наступного опорного плану (тобто повернутися до пункту 3 даного алгоритму).

За основу виберемо план, складений по методу мінімального тарифа з попередньої практичної роботи. Оптимізуємо даний план за методом потенціалів. Для кожного i – го рядка та j – го стовпця введемо певну їх ознаку – потенціал. Складаємо систему рівнянь (по базисних клітинках плану) для визначення потенціалів рядків і стовпців, використовуючи наступну формулу $U_i + V_j = C_{ij}$.

$$\begin{array}{ll} U_1 + V_3 = 2; & U_2 + V_5 = 1; \\ U_1 + V_4 = 2; & U_3 + V_2 = 7; \\ U_2 + V_1 = 1; & U_3 + V_3 = 3. \\ U_2 + V_2 = 4; & \end{array}$$

Приймемо $U_1 = 0$. Тоді отримаємо наступний розв'язок системи:

$$\begin{array}{ll} U_1 = 0; & V_3 = 2; & U_2 = -2; & V_5 = 3; \\ U_1 = 0; & V_4 = 2; & U_3 = 1; & V_2 = 6; \\ U_2 = -2; & V_1 = 3; & U_3 = 1; & V_3 = 2. \\ U_2 = -2; & V_2 = 6; & \end{array}$$

Для кожної вільної клітинки введемо поняття її характеристики Δ_{ij} , яку будемо обчислювати за формулою: $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Тут u_i та v_j - потенціали відповідних

рядка і стовпця, c_{ij} - тариф даного перевезення. Додатна характеристика вільної клітини свідчить про неоптимальність плану і є підставою для включення даної клітини в новий план. Обчислимо характеристики вільних клітин:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 3 - 4 = -1; \\ \Delta_{12} &= u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 6 - 3 = +3; \\ \Delta_{15} &= u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 3 - 4 = -1; \\ \Delta_{23} &= u_2 + v_3 - c_{23} = -2 + 2 - 8 = -8; \\ \Delta_{24} &= u_2 + v_4 - c_{24} = -2 + 2 - 4 = -4; \\ \Delta_{31} &= u_3 + v_1 - c_{31} = 1 + 3 - 9 = -5; \\ \Delta_{34} &= u_3 + v_4 - c_{34} = 1 + 2 - 7 = -4; \\ \Delta_{35} &= u_3 + v_5 - c_{35} = 1 + 3 - 2 = +2. \end{aligned}$$

Характеристики Δ_{12} і Δ_{35} є додатніми. Це свідчить про неоптимальність плану. Клітинку A_1B_2 необхідно включити в план. Деяку клітинку необхідно виключити з базису. Для цього складаємо цикл вільної клітини. Клітина A_1B_2 буде початком циклу.

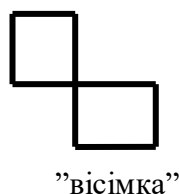
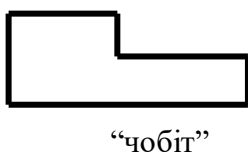
Перерозподіл вантажопотоків по вершинах циклу - 1

	<i>B1</i>	<i>B2</i>	<i>B3</i>	<i>B4</i>	<i>B5</i>	<i>Зпаси</i>
A1	4	⊖ --- 3 --- ⊖	2	2	4	140
A2	1	⊖	8	4	1	180
A3	9	⊖ --- 2 --- ⊕	3	7	2	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

Будуємо цикл. Це є ламана лінія, вершини якої розташовані у клітинах таблиці, а ланки – вздовж рядків, чи стовпців. В кожній вершині циклу зустрічається дві ланки, одна з яких знаходиться у рядку, а друга у стовпці. Початковою вершиною завжди виступає вільна клітина. Всі інші вершини – це базисні клітини. Форма циклу – це прямокутник, “чобіт”, або ”вісімка”. Якщо ламана лінія, що утворює цикл перетинається, то точки самоперетину не є вершинами.

Початкову клітину циклу A_1B_2 помічаємо знаком “+”. Всі інші кутові вершини циклу по черзі помічаємо знаками “-” і “+”. В якості перерозподілюваного елемента вибираємо число 10 (мінімальний вантаж серед усіх клітин помічених знаком “-”). До клітинок помічених знаком “+” додаємо число 10, від клітин помічених знаком “-” віднімаємо число 10. Клітина A_1B_2 входить у базис, клітина A_1B_3 виходить з базису. Отримуємо новий план

Види циклів.



	<i>B1</i>	<i>B2</i>	<i>B3</i>	<i>B4</i>	<i>B5</i>	<i>Зпаси</i>
A1	4	3	2	2	4	140
A2	1	4	8	4	1	180
	60	20		130	100	

A3	9	7	3	7	2	160
	40		120			
Потреби	60	70	120	130	100	480

Вартість плану: $F = 30 + 260 + 60 + 80 + 100 + 280 + 360 = 1170$ Складаємо систему рівнянь для визначення потенціалів рядків і стовпців:

$$\begin{aligned} U_1 + V_2 &= 3; & U_2 + V_5 &= 1; \\ U_1 + V_4 &= 2; & U_3 + V_2 &= 7; \\ U_2 + V_1 &= 1; & U_3 + V_3 &= 3; \\ U_2 + V_2 &= 4; \end{aligned}$$

Прийемо $U_1 = 0$. Тоді отримаємо наступний розв'язок системи:

$$\begin{aligned} U_1 &= 0; & V_2 &= 3; & U_2 &= 1; & V_5 &= 0; \\ U_1 &= 0; & V_4 &= 2; & U_3 &= 4; & V_2 &= 3; \\ U_2 &= 1; & V_1 &= 0; & U_3 &= 4; & V_3 &= 3; \\ U_2 &= 1; & V_2 &= 3; \end{aligned}$$

Обчислимо характеристики вільних клітин:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 0 - 4 = -4; \\ \Delta_{13} &= u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + (-1) - 2 = -3; \\ \Delta_{15} &= u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 0 - 4 = -4; \\ \Delta_{23} &= u_2 + v_3 - c_{23} = 1 + (-1) - 8 = -8; \\ \Delta_{24} &= u_2 + v_4 - c_{24} = 1 + 2 - 4 = -1; \\ \Delta_{31} &= u_3 + v_1 - c_{31} = 4 + 0 - 9 = -5; \\ \Delta_{34} &= u_3 + v_4 - c_{34} = 4 + 2 - 7 = -1; \\ \Delta_{35} &= u_3 + v_5 - c_{35} = 4 + 0 - 2 = +2. \end{aligned}$$

Характеристика Δ_{35} є додатною. Це свідчить про неоптимальність плану. Клітинку A_3B_5 необхідно включити в план. Деяку клітинку необхідно виключити з базису. Для цього складаємо цикл вільної клітини. Клітина A_3B_5 буде початком циклу.

Перерозподіл вантажопотоків по вершинах циклу - 2

	<i>B1</i>	<i>B2</i>	<i>B3</i>	<i>B4</i>	<i>B5</i>	<i>Запаси</i>
A1	4	3	2	2	4	140
		10		130		
A2	1	⊕ 4	8	4	⊖ 1	180
	60	20			100	
A3	9	⊖ 7	3	7	⊕ 2	160
		40	120			
Потреби	60	70	120	130	100	480

Будуємо цикл $A_3B_5 - A_3B_2 - A_2B_2 - A_2B_5$. В якості перерозподілюваного елемента вибираємо число 40 (мінімальний вантаж серед усіх клітин помічених знаком "-"). До клітинок помічених знаком "+" додаємо число 40, від клітин помічених знаком "-" віднімаємо число 40. Клітина A_3B_5 входить у базис, клітина A_3B_2 виходить з базису. Отримуємо новий план

	<i>B1</i>	<i>B2</i>	<i>B3</i>	<i>B4</i>	<i>B5</i>	<i>Запаси</i>
--	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	---------------

A1	4	3	2	2	4	140
A2	1	4	8	4	1	180
A3	9	7	3	7	2	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

Вартість плану: $F = 30 + 260 + 60 + 240 + 60 + 360 + 80 = 1090$

Складаємо систему рівнянь для визначення потенціалів рядків і стовпців:

$$\begin{aligned}
 U_1 + V_2 &= 3; & U_2 + V_5 &= 1; \\
 U_1 + V_4 &= 2; & U_3 + V_3 &= 3; \\
 U_2 + V_1 &= 1; & U_3 + V_5 &= 2. \\
 U_2 + V_2 &= 4;
 \end{aligned}$$

Прийmemo $U_1 = 0$. Тоді отримаємо наступний розв'язок системи:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= 0; & V_2 &= 3; \\
 U_1 &= 0; & V_4 &= 2; \\
 U_2 &= 1; & V_1 &= 0; \\
 U_2 &= 1; & V_2 &= 3; \\
 U_2 &= 1; & V_5 &= 0; \\
 U_3 &= 2; & V_3 &= 1; \\
 U_3 &= 2; & V_5 &= 0
 \end{aligned}$$

Обчислимо характеристики вільних клітин:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11} &= u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 0 - 4 = -4; \\
 \Delta_{13} &= u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 2 = -1; \\
 \Delta_{15} &= u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 0 - 4 = -4; \\
 \Delta_{23} &= u_2 + v_3 - c_{23} = 1 + 1 - 8 = -6; \\
 \Delta_{24} &= u_2 + v_4 - c_{24} = 1 + 2 - 4 = -1; \\
 \Delta_{31} &= u_3 + v_1 - c_{31} = 2 + 0 - 9 = -7; \\
 \Delta_{32} &= u_3 + v_2 - c_{32} = 2 + 3 - 7 = -2; \\
 \Delta_{34} &= u_3 + v_4 - c_{34} = 2 + 2 - 7 = -3.
 \end{aligned}$$

В

исновок. Оптимальний план має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 130 & 0 \\ 60 & 20 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 40 \end{pmatrix} \quad F_{\min} = 1090.$$

Завдання для самостійного виконання

Із t пунктів необхідно перевезти вантаж для n споживачів. У кожному із пунктів відправлення є відповідно A_i ($i=1,2,\dots,t$) одиниць вантажу. Потреби кожного із споживачів відповідно V_j ($j=1,2,\dots,n$) одиниць. Затрати на перевезення одиниці вантажу від i -го постачальника до j -го споживача задані матрицею C_{ij} ($i=1,2,\dots,t; j=1,2,\dots,n$).

Знайти оптимальний план перевезень, щоб затрати на перевезення вантажу були мінімальними. При цьому попит усіх споживачів повинен бути задоволений, і весь вантаж вивезений. Початковий опорний план з практичної роботи № 6.

Практичне заняття № 9

Тема. Розв'язування транспортної задачі лінійного програмування в MS EXCEL.

Мета. Навчитися розв'язувати транспортну задачу лінійного програмування в MS EXCEL

Контрольні питання

1. Ввід даних транспортної задачі в MS EXCEL.

Теоретичні відомості

Транспортна задача. Із 3 пунктів необхідно перевезти вантаж для 4 споживачів. У кожному із пунктів відправлення є відповідно 100, 150, 150 одиниць вантажу. Потреби кожного із споживачів відповідно 45, 130, 90, 135 одиниць. Затрати на перевезення однієї одиниці вантажу від i -го постачальника ($i=1, 2, 3$) до j -го споживача задані матрицею

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Побудувати математичну модель задачі та знайти оптимальний план перевезень, щоб затрати на перевезення вантажу були мінімальними. При цьому попит усіх споживачів повинен бути задоволений, і весь вантаж вивезений.

Розв'язання. Цільова функція виражає загальні затрати на перевезення вантажу. Коли позначити через x_{ij} кількість вантажу, перевезеного від i -го постачальника до j -го споживача, а затрати на перевезення однієї одиниці вантажу від i -го постачальника до j -го споживача через c_{ij} , то цільова функція матиме вигляд

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min .$$

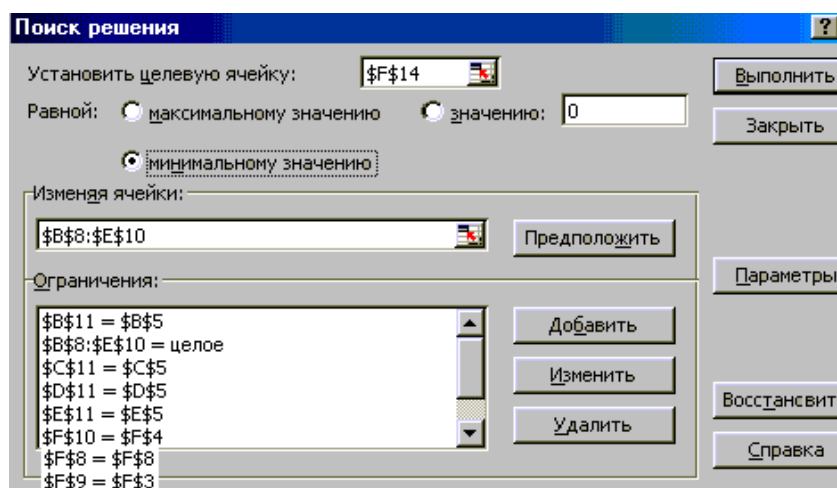
Обмеження повинні враховувати можливості постачальників та потреби споживачів:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 150, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 150, \\ \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45, \\ \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 130, \\ \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 90, \\ \quad x_{14} + x_{24} + x_{34} = 135. \end{array} \right.$$

Крім того, Розв'язання повинен бути невід'ємним та у цілих числах.

	A	B	C	D	E	F
1		Тарифи				Можливості постачальників
2		7	3	4	3	100
3		6	6	3	2	150
4		4	1	5	6	150
5	потреби споживачів	45	130	90	135	
6						
7		Значення X				
8						0
9						0
10						0
11		0	0	0	0	
12						
13		Допоміжна матриця вартості перевезень				Цільова функція
14		0	0	0	0	0
15		0	0	0	0	
16		0	0	0	0	

Звертаємося до опції „Поиск решения”. Заповнюємо відповідні поля:



У вікні Параметри зазначаємо максимальну кількість ітерацій та час, відзначаємо, що модель лінійна та розв'язання невід'ємне. Отримуємо розв'язання:

	A	B	C	D	E	F
7		Значення X				
8		0	25	75	0	100
9		0	0	15	135	150
10		45	105	0	0	150
11		45	130	90	135	
12						
13		Допоміжна матриця вартості перевезень				Цільова функція
14		0	75	300	0	975
15		0	0	45	270	
16		180	105	0	0	

З отриманих результатів можна зробити висновок: для того щоб затрати на перевезення вантажу були мінімальними і при цьому попит усіх споживачів бути задоволений, і весь вантаж вивезений, необхідно:

- від першого постачальника перевезти 25 одиниць вантажу другому споживачу та 75 одиниць вантажу третьому споживачу;
 - від другого постачальника перевезти 15 одиниць вантажу третьому споживачу та 135 одиниць вантажу четвертому споживачу;
 - від третього постачальника перевезти 180 одиниць вантажу першому споживачу та 105 одиниць вантажу другому споживачу.
- При цьому мінімальна вартість перевезень становитиме 975 грошових одиниць.

Завдання для самостійного виконання

Завдання з практичної роботи №7

Практичне заняття № 10

Тема. Цілочисельне лінійне програмування.

Мета. Навчитися знаходити цілі розв'язки задачі лінійного програмування методом гілок і границь.

Контрольні питання

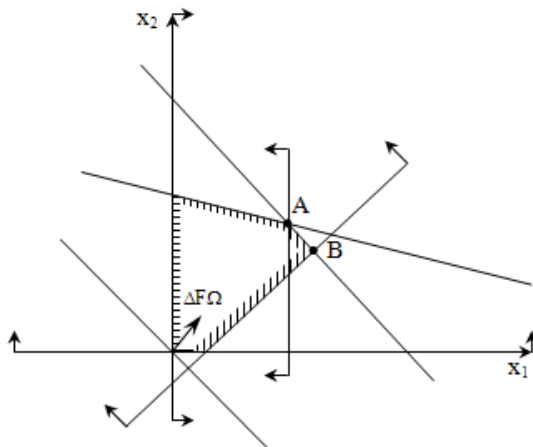
1. Постановка задачі цілочисельного програмування.
2. Суть методу гілок і границь.

Теоретичні відомості

Приклад. Вирішити ЦЗЛП методом гілок і границь.

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \leq 38; \\ x_1 + x_2 \leq 7; \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 5; \end{cases} \quad x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_1, x_2 \Rightarrow \text{цілі.}$$

Зобразимо ОПР задачі.



Визначимо координати точки А.

Для цього розв'язується система рівнянь, використовуються формули Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 = 38 \\ x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \quad \Delta = -9; \quad \Delta_1 = -39; \quad \Delta_2 = -24;$$

$$x_1 = \frac{13}{3}; \quad x_2 = \frac{8}{3};$$

Таким чином, $F(A) = F(13/3, 8/3) = 7$.

Визначимо координати точки В.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ 4x_1 - 5x_2 = 5 \end{cases} \quad x_1 = \frac{40}{9}; \quad x_2 = \frac{23}{9};$$

Таким чином, $F(B) = F(40/9, 23/9) = 7$.

Процедура розгалуження здійснюється відповідно до співвідношень

$$G_1^{(1)} = \{\bar{X} \in G_0; \quad x_1 \leq 4\}$$

$$G_1^{(2)} = \{\bar{X} \in G_0; \quad x_1 \geq 5\}$$

Вихідна задача розпадається на дві:

Перший крок

1 задача

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \leq 38; \\ x_1 + x_2 \leq 7; \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 5; \\ x_1 \leq 4; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0;$$

$$F_{\max}^* = 6,727$$

$$\bar{X}^* = (4; \frac{30}{11})$$

2 задача

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \leq 38; \\ x_1 + x_2 \leq 7; \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 5; \\ x_1 \geq 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

Ця задача несумісна

Другий крок

Розгалуження здійснюємо по змінній x_2 .

$$G_2^{(1)} = \{\bar{X} \in G_2^{(1)}; \quad x_2 \leq 2\}$$

$$G_2^{(2)} = \{\bar{X} \in G_2^{(1)}; \quad x_2 \geq 3\}$$

1 задача

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$$

2 задача

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \leq 38; \\ x_1 + x_2 \leq 7; \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 5; \\ x_2 \leq 2; \\ x_1 \leq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \leq 38; \\ x_1 + x_2 \leq 7; \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 5; \\ x_1 \leq 4; \\ x_2 \geq 3; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 = 5 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 = 38 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$F_{\max}^* = 5,75$$

$$\bar{X}^* = (3,75; 2)$$

$$F_{\max}^* = 5,5$$

$$\bar{X}^* = (2,5; 3)$$

Отриманий план не є цілочисельним

Третій крок

Розгалуження здійснюємо в першій задачі по змінній x_1 .

$$G_3^{(1)} = \{\bar{X} \in G_3^{(1)}; \quad x_1 \leq 3\}$$

$$G_3^{(2)} = \{\bar{X} \in G_3^{(2)}; \quad x_1 \geq 4\}$$

$$F_{\max}^* = 5$$

$$\bar{X}^* = (3; 2)$$

Четвертий крок

Розгалуження здійснюємо по змінній x_1 задачі другого кроку.

$$G_3^{(1,1)} = \{\bar{X} \in G_3^{(1,1)}; \quad x_1 \leq 2\}$$

$$G_3^{(1,2)} = \{\bar{X} \in G_3^{(1,2)}; \quad x_1 \geq 3\}$$

1 задача

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \leq 38; \\ x_1 + x_2 \leq 7; \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 5; \\ x_1 \leq 2; \\ x_2 \leq 3; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

$$F_{\max}^* = 5;$$

$$\bar{X}^* = (2; 3).$$

2 задача

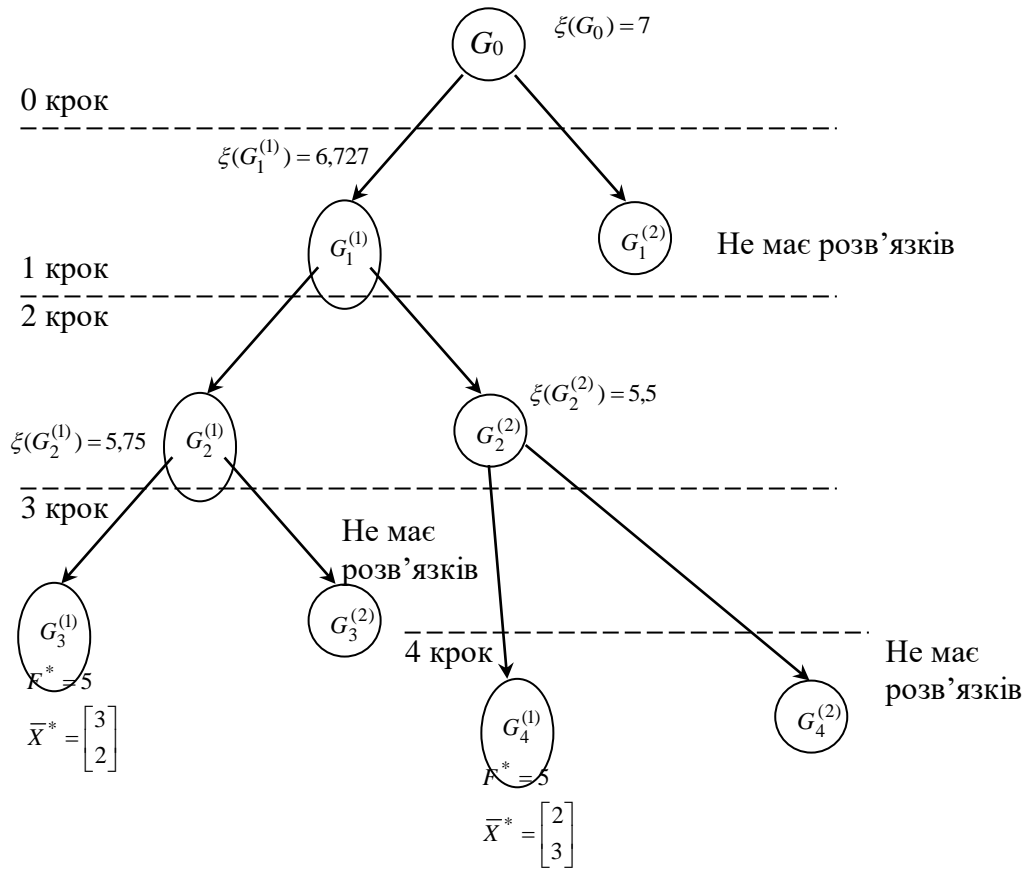
$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \leq 38; \\ x_1 + x_2 \leq 7; \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 5; \\ x_1 \geq 3; \\ x_2 \leq 3; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

Ця задача несумісна.

Дерево розв'язків



Завдання для самостійного виконання

Методом гілок і границь знайти цілі розв'язки задачі лінійного програмування

Таблиця

1. $z = 12x_1 + 3x_2 + 20$; $5x_1 + 2x_2 \geq 20$; $x_1 + 2x_2 \geq 14$; $2x_1 - 2x_2 \leq 6$.	2. $z = 7x_1 + 3x_2 + 30$; $10x_1 + 9x_2 \leq 90$; $-x_1 + 2x_2 \leq 6$; $6x_1 + 5x_2 \leq 30$.	3. $z = -4x_1 - 3x_2 + 20$; $4x_1 + 5x_2 \leq 20$; $7x_1 + 3x_2 \leq 21$; $2x_1 + x_2 \geq 2$.
4. $z = -7x_1 - 4x_2 + 15$; $3x_1 - 2x_2 \leq 12$; $3x_1 + 2x_2 \geq 6$; $-x_1 + 2x_2 \leq 4$.	5. $z = 2x_1 + 5x_2 + 12$; $6x_1 + 5x_2 \geq 30$; $3x_1 - 2x_2 \leq 12$; $-3x_1 + 6x_2 \leq 12$.	6. $z = 6x_1 + 4x_2 + 20$; $2x_1 + x_2 \geq 4$; $x_1 + 2x_2 \geq 4$; $-x_1 + x_2 \leq 5$.
7. $z = -5x_1 - 2x_2 + 20$;	8. $z = 4x_1 + 2x_2 + 15$;	9. $z = -3x_1 - 4x_2 - 12$;

$4x_1 + x_2 \leq 24;$ $x_1 + x_2 \geq 2;$ $x_1 - 2x_2 \leq 2;$ $-2x_1 + 3x_2 \leq 6.$	$x_1 - 2x_2 \leq 4;$ $3x_1 + 2x_2 \geq 6;$ $9x_1 + 8x_2 \leq 72;$ $-x_1 + 2x_2 \leq 5.$	$-4x_1 + 3x_2 \leq 12;$ $x_1 - 2x_2 \leq 4;$ $6x_1 + 7x_2 \geq 42.$
10. $z = -5x_1 + 3x_2 + 10;$ $3x_1 + 2x_2 \leq 18;$ $5x_1 + 2x_2 \geq 10;$ $-x_1 + x_2 \leq 3;$ $x_1 + 2x_2 \leq 4.$	11. $z = 4x_1 + 6x_2 + 20;$ $-3x_1 + 2x_2 < 6;$ $x_1 + x_2 < 8;$ $3x_1 - 2x_2 < 6;$ $x_2 \geq 1.$	12. $z = 3x_1 + 4x_2 + 10;$ $3x_1 + x_2 \geq 6;$ $2x_1 + 5x_2 \geq 10;$ $2x_1 + 3x_2 \leq 6;$ $x_1 \leq 4.$
13. $z = 4x_1 + 2x_2 + 20;$ $-x_1 + 2x_2 \leq 6;$ $x_1 + 2x_2 \geq 4;$ $7x_1 + 8x_2 \leq 56;$ $x_1 - x_2 \leq 5.$	14. $z = 2x_1 - 2x_2 + 15;$ $3x_1 + 4x_2 \geq 12;$ $4x_1 + 3x_2 \geq 12;$ $x_1 + 2x_2 \leq 8;$ $x_1 \leq 6.$	15. $z = 3x_1 + 2x_2 - 10;$ $2x_1 - x_2 \geq 0;$ $2x_1 + 3x_2 \geq 6;$ $x_1 - 2x_2 \leq 4.$
16. $z = 2x_1 + 3x_2 + 16;$ $2x_1 - 5x_2 \leq 10;$ $-2x_1 + 5x_2 \leq 10;$ $2x_1 + 3x_2 \geq 12.$	17. $z = 4x_1 + 3x_2 + 5;$ $x_1 - x_2 \geq 0;$ $x_1 + 3x_2 \geq 6;$ $2x_1 - 3x_2 \leq 21.$	18. $z = 4x_1 + 6x_2 + 6;$ $2x_1 - 3x_2 \leq 12;$ $-x_1 + 2x_2 \leq 8;$ $3x_1 + 2x_2 \geq 24.$
19. $z = 2x_1 + 5x_2 + 12;$ $-x_1 - x_2 \leq 3;$ $x_1 - 3x_2 \leq 0;$ $3x_1 + 2x_2 \leq 24.$	20. $z = 4x_1 + 3x_2 + 10;$ $x_1 + 3x_2 \geq 6;$ $-3x_1 + x_2 \leq 9;$ $x_1 - x_2 \leq 3.$	21. $z = 3x_1 + 4x_2 + 8;$ $x_1 - 3x_2 \leq 0;$ $2x_1 + x_2 \geq 6;$ $x_1 + x_2 \leq 10;$ $-x_1 + x_2 \leq 3.$
22. $z = -3x_1 - 2x_2 + 15;$ $x_1 - 4x_2 \leq 0;$ $-3x_1 + x_2 \leq 3;$ $6x_1 + 5x_2 \geq 30.$	23. $z = 5x_1 + 2x_2 + 10;$ $5x_1 + 2x_2 \geq 10;$ $2x_1 - 3x_2 \leq 6;$ $x_1 + 2x_2 \geq 15;$ $7x_1 + 6x_2 \leq 42.$	24. $z = -2x_1 + 3x_2 + 16;$ $5x_1 - 2x_2 \leq 10;$ $x_1 + x_2 \leq 3;$ $4x_1 + 3x_2 \geq 12.$

Практичне заняття № 11

Тема. Цілочисельне лінійне програмування.

Мета. Навчитися складати математичну модель задачі.

МОДЕЛІ ЦЗЛП

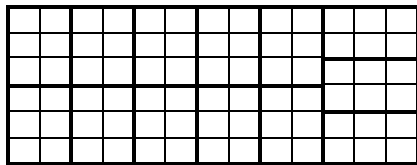
У значній частині практичних економічних задач потрібно визначити цілочисельний оптимальний план. Наприклад, розподіл виробничих площ між структурними підрозділами, завантаження встаткування, розкрій матеріалів, розподіл транспорту по маршрутах і т.д. Розглянемо приклади.

Задача 1. З жерстин розміром 6 на 13 необхідно виготовити 800 деталей розміром 4 на 5 і 400 деталей розміром 2 на 3. Скласти модель оптимізації розкрою матеріалу по:

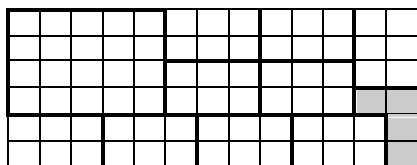
- мін сумарних відходів;
- мін кількості використаних листів.

На першому етапі приведемо можливі варіанти розкрою матеріалу

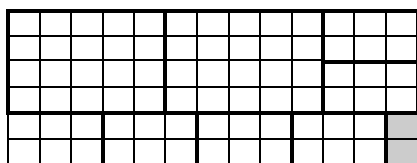
1



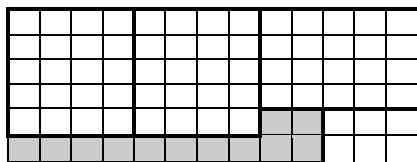
2



3



4



Складемо таблицю, що характеризує кожний з отриманих результатів.

№ вар.	кількість деталей		відходи
	4×5	2×3	
1	0	13	0
2	1	9	4
3	2	6	2
4	3	1	2
кількість деталей	800	400	

На другому етапі складемо математичну модель задачі.

а) Задача оптимізації по мінімуму сумарних відходів.

Для складання математичної моделі введемо змінні x_1, x_2, x_3, x_4 . Кожна з них відповідає кількості листів розміром 6 на 13, які повинні розрізатися відповідним способом (1, 2, 3, 4). У цьому випадку функція цілі, що визначає мінімум відходів при відповідному розкрої, має вигляд

$$F = 4x_2 + 2x_3 + 12x_4 \rightarrow \min;$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 800; \\ 13x_1 + 9x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 400; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, 4};$$

$$x_j \Rightarrow \text{цілі}; \quad j = \overline{1, 4}.$$

б) Задача оптимізації по мінімуму числа використаних листів

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min;$$

при обмеженнях

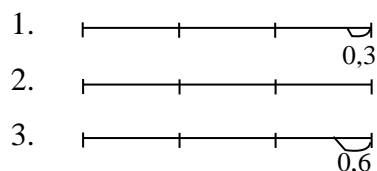
$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 800; \\ 13x_1 + 9x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 400; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, 4};$$

$$x_j \Rightarrow \text{цілі}; \quad j = \overline{1, 4}.$$

Задача 2. Є досить велика кількість колод довжиною 3 м. Колоди необхідно розпиляти на заготовки двох видів: довжиною $l_1 = 1,2$ м і довжиною $l_2 = 0,9$ м. Заготовки кожного виду необхідно одержати в кількостях не менш 50 й 81 штук відповідно. Кожна колода може бути розпиляна на зазначені заготовки декількома способами. Потрібно знайти мінімальне число колод, що розпилюють кожним способом для того, щоб одержати необхідне число заготовок.

Розглянемо можливі варіанти розпила колоди.



Зазначені варіанти представлені в таблиці.

№ вар.	число заготівок		відходи
	l_1	l_2	
1	0	3	0,3
2	1	2	0
3	2	0	0,6
кількість заготівок	≥ 50	≥ 81	

Далі складемо математичну модель задачі:

а) по тій сумарній кількості розпиляних колод

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 \geq 50; \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 81; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, 3};$$

$$x_j \Rightarrow \text{цілі}; \quad j = \overline{1, 3}.$$

б) по тій кількості відходів

$$F = 0,3x_1 + 0,6x_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 \geq 50; \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 81; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, 3};$$

$$x_j \Rightarrow \text{цілі}; \quad j = \overline{1, 3}.$$

Завдання для самостійного виконання

ЗАДАЧА 1

Із листів металу розміру $m \times n$ необхідно виготовити N заготовок розміру $m_1 \times n_1$ та M заготовок розміру $m_2 \times n_2$. Скласти модель оптимізації розкроювання металу за мінімумом загальних відходів.



№	m	n	N	m_1	n_1	M	m_2	n_2
1.	7	12	900	5	6	500	3	4
2.	6	10	800	3	5	400	2	4
3.	5	10	700	2	4	300	3	3
4.	6	10	600	3	4	400	3	5
5.	7	6	500	3	5	300	2	4
6.	8	10	400	4	6	400	3	5
7.	9	10	300	5	7	400	2	4
8.	8	4	350	6	4	370	3	2
9.	6	8	500	3	2	400	4	4
10.	6	10	500	5	6	450	2	5
11.	7	6	900	4	6	500	3	2
12.	6	10	800	3	5	400	2	4
13.	5	10	700	2	4	300	3	3
14.	6	10	600	3	4	400	3	5
15.	7	6	500	3	5	300	2	4
16.	8	10	400	4	6	400	3	5
17.	9	10	300	5	7	400	2	4
18.	8	4	350	6	4	370	3	2
19.	6	8	500	3	2	400	4	4
20.	6	10	500	5	6	450	2	5
21.	7	12	900	5	6	500	3	4
22.	6	10	800	3	5	400	2	4
23.	5	10	700	2	4	300	3	3
24.	6	10	600	3	4	400	3	5
25.	7	6	500	3	5	300	2	4
26.	8	10	400	4	6	400	3	5
7.	9	10	300	5	7	400	2	4
28.	8	4	350	6	4	370	3	2
29.	6	8	500	3	2	400	4	4
30.	8	8	500	4	5	400	4	4

ЗАДАЧА 2

В столярній майстерні мають в достатній кількості колод довжиною l метрів. Колоди необхідно розпилити на заготовки двох видів: довжиною l_1 та довжиною l_2 метрів відповідно. Кожної подоби необхідно заготовити не менше m та n штук відповідно. Скласти модель оптимізації розпилювання колод за мінімумом загальних відходів; мінімумом числа використаних колод.

№ зад.	l	l_1	l_2	m	n
1	4	2	1,5	50	80
2	5	3	2	40	70
3	6	2,4	1,2	3	50
4	6	3	1,8	40	30
5	6	2,5	3,2	50	40
6	6	3	1,5	40	80
7	6	3,4	1,2	50	80
8	5	1,2	0,8	40	60
9	5	1,4	0,7	30	20
10	5	1,6	0,5	40	50
11	6	2	1,5	50	80
12	5	1,8	2	40	70
13	5	2,4	1,2	3	50
14	6	2,5	1,8	40	30
15	6	1,2	3,2	50	40
16	6	3	1,5	40	80
17	6	3,4	1,2	50	80
18	3	1,2	0,8	40	60
19	4	1,4	0,7	30	20
20	4	1,6	0,5	40	50
21	5	2	1,5	50	80
22	5	1,5	1	40	70
23	5	2,4	1,2	3	50
24	6	3	1,8	40	30
25	6	2,5	1,2	50	40
26	5	3	1,5	40	80
27	6	2,4	1,2	50	80
28	5	1,2	1,8	40	60
29	4	1,4	0,7	30	20
30	5	1,6	0,8	40	50

Практичне заняття № 12

Тема. Нелінійне програмування.

Мета. Навчити студентів розв'язувати оптимізаційні задачі для нелінійних функцій.

Загальна постановка задачі

Якщо система обмежень на змінні x_1, x_2, \dots, x_n містить тільки рівняння, то це є окремий випадок задачі НП:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr}, \quad (7.1)$$

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (7.2)$$

Функції $f, q_i (i = \overline{1, m})$ є такими, що диференціюються.

Алгоритм розв'язання задачі методом множників Лагранжа

Задача (7.1), (7.2) на умовний екстремум може бути розв'язана методом множників Лагранжа, що налічує такі основні етапи:

1. Уводиться набір допоміжних змінних $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ за кількістю обмежень (8.2), що називаються невизначеними множниками Лагранжа.
2. Укладається функція Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_i] \quad (7.3)$$

3. Складається система рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &= 0; & j &= \overline{1, n} \\ \dots & & & \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} &= 0; & i &= \overline{1, m} \end{aligned} \quad (7.4)$$

4. Система (7.4) містить $(n+m)$ рівнянь, розв'язуючи їх визначають невідомі $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$. Необхідною умовою того, що точка $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ є розв'язком задачі, має бути виконання рівностей (7.4). Система (7.4) має декілька розв'язань і вони по черзі безпосередньо підставляються в (7.1) для визначення виду екстремуму.

Приклад

Знайти екстремальне значення функції

$$f = 3x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 5x_3^2 - 15 \rightarrow \text{extr};$$

при обмеженнях на змінні:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

У задачі що розглядається є два обмеження, тому вводимо два множники Лагранжа λ_1, λ_2 . Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 5x_3^2 - 15 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 4) + \lambda_2(2x_2 + x_3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1 + x_2 + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 - 2x_3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = -2x_2 + 10x_3 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 - 4 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2x_2 + x_3 - 3 \end{cases}$$

Розв'язуючи отриману систему, знаходимо: $x_1^* = 2,4074$;

$$x_2^* = 1,5926;$$

Тоді $x_3^* = -0,1852$.

$$f(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 3 \cdot 2,4074^2 + 2,4074 \cdot 1,5926 + 1,5926^2 - 2 \cdot 1,5926 \cdot (-0,1852) + 5 \cdot (-0,1852) - 15 = 9,5185$$

Знайдемо значення функції $f(x_1, x_2, x_3)$ на однім із припустимих розв'язків. Наприклад, $x_1 = 4$; $x_2 = 0$; $x_3 = 3$ $f_{\text{дан}}(4, 0, 3) = 48 + 0 + 0 - 0 + 45 - 15 = 78$

Завдання для самостійного розв'язування

Завдання. Розв'язати задачу нелінійного програмування

$$1. f = 5x_1^2 + x_1x_3 + 3x_2^2 - 3x_2x_3 + x_3^2 \rightarrow \text{extr} \quad 2. f = 6x_1^2 + x_1 + x_1x_2 + 3x_2^2 - x_3^2 - x_2x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_3 = 14 \\ 2x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

$$3. f = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 + x_2x_3 + 2x_3^2 - 15 \rightarrow \text{extr} \quad 4. f = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_3 + 5 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_3 = 16 \end{cases}$$

$$5. f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_2x_3 + 2x_3^2 \rightarrow \text{extr} \quad 6. f = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_2x_3 - 4x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

$$7. f = 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_3 + 4x_1x_2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 18 \\ 3x_1 + 5x_3 = 25 \end{cases}$$

$$9. f = 3x_1^2 + x_1 - 2x_2^2 - x_1x_3 + 2x_3^2 + x_2x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_3 = 8 \end{cases}$$

$$11. f = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 - x_2x_3 + 4x_3^2 - 15 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 12 \\ 5x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

$$13. f = x_1^2 + 2x_1 + 5x_1x_2 + x_2^2 - 4x_3^2 - x_2x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10 \\ 4x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$$

$$8. f = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 30 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$10. f = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - x_1x_3 - 2x_1x_2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$12. f = 2x_1^2 + x_1x_3 - 4x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -12 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

$$14. f = 3x_1^2 + x_1x_3 + 2x_2^2 + x_1x_2 - 3x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 16 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 20 \end{cases}$$

$$15. f = 6x_1^2 + 5x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2 + x_2x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -8 \\ 4x_2 + 5x_3 = 18 \end{cases}$$

$$17. f = 2x_1^2 + x_2x_3 + x_2^2 - 3x_3^2 - x_2x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

$$19. f = 4x_1^2 + x_1 + 5x_2^2 + x_1x_3 - 4x_3^2 + x_2x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = -6 \end{cases}$$

$$21. f = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3x_2x_3 - x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 = 12 \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 = -8 \end{cases}$$

$$23. f = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 + x_1x_3 - 3x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 16 \end{cases}$$

$$25. f = x_1^2 - x_1x_3 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + x_2x_3 + 5 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -10 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$$

$$27. f = 2x_1^2 + 4x_2 + 5x_1x_3 - x_2^2 + 3x_3^2 + x_2x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

$$29. f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 8 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$16. f = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_2x_3 + x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 15 \\ 4x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

$$18. f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - x_2x_3 + 3x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}$$

$$20. f = x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 - x_2x_3 - 4x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 16 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 22 \end{cases}$$

$$22. f = 3x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_3 + x_1x_2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

$$24. f = 6x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 + x_2x_3 + 4x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$$

$$26. f = 3x_1^2 + 5x_1 + x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 - 4x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 16 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

$$28. f = 4x_1 + 5x_1x_2 - 2x_2^2 + 3x_1x_3 - 2x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 12 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}$$

$$30. f = 6x_1^2 + x_1x_2 - 3x_1x_3 + 2x_2^2 - 4x_3^2 \rightarrow \text{extr}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 6 \\ 7x_1 + x_2 + x_3 = -6 \end{cases}$$