

Міністерство освіти і науки України
ВСП « Ковельський промислово-економічний фаховий коледж
Луцького національного технічного університету»



ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки до практичних занять
для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий
молодший бакалавр спеціальності 071 Облік і оподаткування

Ковель 2025

УДК 51(07)

Затверджено до видання методичною радою ВСП «КПЕФК ЛНТУ»
протокол №_____ від « ____ » _____ 2025 року

Голова методичної ради ВСП «КПЕФК ЛНТУ» _____ Ігор ІЛЮШИК

Розглянуто і схвалено на засіданні циклової комісії з природничо-математичних освітніх компонентів ВСП «Ковельський промислово-економічний фаховий коледж ЛНТУ»,

протокол № ____ від « ____ » _____ 2025 року.

Голова циклової комісії _____ Жанна КРИВОШ

Електронна копія друкованого видання передана до книжкового фонду бібліотеки ВСП «КПЕФК ЛНТУ»

Завідувачка бібліотеки _____ Неля ТЕЛЮЧИК

Укладач: _____ Жанна КРИВОШ, викладач ВСП «КПЕФК ЛНТУ»

Рецензент: _____ Тетяна СЕЛІВОНЧИК, к.ф.н., викладач

ВСП «КПЕФК ЛНТУ»

Відповідальний за випуск: _____ Леся ПРОКОПЧУК, методист
ВСП «КПЕФК ЛНТУ»

Вища математика [Текст]: Методичні вказівки до практичних занять для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр спеціальності 071 Облік і оподаткування
/уклад. Жанна Кривош. – Ковель: ВСП «КПЕФК ЛНТУ», 2025. – 40 с.

Видання містить теоретичні відомості, вказівки щодо виконання завдань.

© Ж. Кривош, 2025

Зміст

Вступ.....	4
Практичне заняття № 1. Матриці. Визначники.....	5
Практичне заняття № 2. Методи розв’язування СЛАР.....	8
Практичне заняття № 3 Лінійне програмування.	13
Практичне заняття № 4. Транспортна задача	18
Практичне заняття № 5. Метод потенціалів	20
Практичне заняття № 6. Розв’язування задачі лінійного програмування в MS Excel	25
Практичне заняття № 7. Диференціальне числення функції однієї змінної	28
Практичне заняття № 8. Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла	30
Практичне заняття № 9. Диференціальні рівняння	32

Вступ

Для поліпшення якості засвоєння здобувачами освіти програмного матеріалу освітнього компоненту “Вища математика” велике значення має виконання практичних завдань.

Студент, який хоче якомога краще засвоїти матеріал, має добре розуміти: на лекційному занятті викладач подає основи знань, виділяє ключові істини дисципліни, які повинні пробуджувати потяг до їх поглиблення та вдосконалення. Практичні заняття забезпечують можливість здобути чітку систему знань.

Методичні вказівки до практичних занять містять теоретичний матеріал, приклади розв’язування завдань та завдання для самостійного виконання.

За змістом цикл практичних занять охоплює найважливіші розділи освітнього компонента “Вища математика”:

- лінійна алгебра ;
- лінійне програмування;
- диференціальне числення функції однієї змінної;
- інтегральне числення;
- диференціальні рівняння.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 1

ТЕМА Дії над матрицями. Обчислення визначників. Обернена матриця.

Мета: Навчити студентів виконувати операції над матрицями, обчислювати визначники другого і третього порядків різними способами, знаходити обернену матрицю.

Література:

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: навчальний посібник. – К.: центр учбової літератури, 2022, 448 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2017., 648 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. – К.: А.С.К., 2017., 480 с.

Теоретичні відомості

Сумою матриць A і B є матриця C з елементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Операція додавання матриць можлива лише для матриць однакового розміру.

Добутком матриці A на число k є матриця B з елементами $b_{ij} = ka_{ij}$.

Добутком матриці A розміру $m \times n$ на матрицю B розміру $n \times k$ є матриця C , розміром $m \times k$, елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Визначник другого порядку обчислюється за формулою

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Визначник третього порядку обчислюється за формулою

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку Δ називається визначник другого порядку, який утворюється з Δ в результаті викреслювання рядка i і стовпця, що містять a_{ij} .

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку називають його мінор M_{ij} , взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$.

Теорема. Кожний визначник можна подати як суму добутків елементів одного якого-небудь рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Наприклад, розкладання визначника за елементами другого стовпця здійснюють за формулою

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32},$$

де

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Знаходження оберненої матриці. Нехай A – деяка квадратна матриця n -го порядку. Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A , якщо виконується умова $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця.

Обернена матриця знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці A .

Завдання для самостійного виконання

1. Обчислити $3A - 2B$
2. Обчислити добуток матриць $A \cdot B$.
3. Обчислити визначник матриці A
4. Знайти матрицю, обернену до матриці B .

№	Матриця A	Матриця B
1	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 0 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{4}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{5}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{6}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{7}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{8}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{9}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$\frac{2}{0}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
$\frac{2}{1}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 2

ТЕМА Методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Мета: Формувати вміння розв'язувати системи лінійних рівнянь методами Крамера, Гаусса та матричним способом.

Література:

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: навчальний посібник. – К.: центр учбової літератури, 2022, 448 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2017., 648 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. – К.: А.С.К., 2017., 480 с

Теоретичні відомості

Розв'язування системи трьох лінійних рівнянь. Правило Крамера

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

(коефіцієнти $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$, і вільні члени b_1, b_2 і b_3 вважаються заданими).

Визначник Δ , який називається *визначником системи*, записується так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, утворюються з визначника відповідно заміною першого, другого і третього стовпців стовпчиком вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

При розв'язуванні системи рівнянь можуть бути такі три випадки:

1. $\Delta \neq 0$, тоді система (1.3) має єдиний розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Формули (1.5) називають *формулами Крамера*.

Якщо $\Delta = 0$, а принаймні один із визначників $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ не дорівнює нулю, то система (1.3) розв'язків не має.

Якщо $\Delta = 0$, і $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0$, то система має безліч розв'язків.

Матричний метод розв'язування системи лінійних рівнянь.

Нехай задано систему, яка містить n лінійних рівнянь з n невідомими.

Введемо матриці

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

\

тоді розв'язок системи $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

Завдання для самостійного виконання

1. За правилом Крамера розв'язати систему двох рівнянь.
2. Розв'язати систему трьох рівнянь матричним методом.

№ п/п	Система двох лінійних рівнянь	Система трьох лінійних рівнянь
1	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -3 \\ 4x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -10 \\ -x_1 + 5x_2 = 19 \end{cases}$	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 11 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 8 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$	$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8 \\ 5x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

10	$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = -2 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -3 \\ -2x_1 + 5x_2 = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 12 \end{cases}$
12	$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 = -14 \\ 3x_1 - 4x_2 = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 6 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 = -5 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = -6 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -8 \\ -x_1 + 3x_2 = -10 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$
16	$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = -14 \\ x_1 + x_2 = -3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 12 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$
18	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ 5x_1 - 2x_2 = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 18 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -4 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$
20	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$
21	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$
22	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -11 \\ x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -7 \end{cases}$

23	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 4x_1 - x_2 = 9 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$
24	$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 15 \\ 3x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$
25	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 13 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 15 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -9 \end{cases}$
26	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 8 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$
27	$\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$	$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$
28	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8 \\ 5x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$
29	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$
30	$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = -2 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 3

ТЕМА Розв'язування задачі лінійного програмування графічним методом.

МЕТА Сформувати вміння будувати математичну модель задачі, графічно розв'язувати систему нерівностей.

Література:

Яровий А. А. Математичні методи дослідження операцій. Лінійне програмування. Частина 1 : навчальний посібник / А. А. Яровий, Л. М. Ваховська, Л. В. Крилик. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 86 с

Теоретичні відомості

Задача . Для забезпечення трьох районів міста хлібобулочними виробами є два хлібозаводи. Хлібозавод №1 випікає щоденно 25 т хліба, хлібозавод № 2 – 35 т хліба. Перший район потребує щоденно 30 т хліба, другий – 10 т, третій – 20 т. Вартість доставки однієї тони хліба з хлібозаводу у район наведена у таблиці 1

Таблиця 1

	Перший район	Другий район	Третій район
Завод № 1	5	1	2
Завод № 2	1	3	6

Складіть націль оптимальний план перевезення хліба (витрати на перевезення найменші)

Розв'язання

Вводимо змінні x та y , де x – кількість тон хліба, які перевозяться із заводу № 1 в перший район, y – кількість тон хліба, які перевозяться із заводу № 1 в другий район. Тоді в третій район із заводу № 1 має бути перевезено $25-x-y$ т. Із заводу № 2 в перший район треба перевезти $20-x$ тон, в другий район – $10-y$ тон і третій – $30-(25-x-y)=5+x+y$ тон. План перевезення матиме такий вигляд

Таблиця 2

	Перший район	Другий район	Третій район
Завод № 1	x	y	$25-x-y$
Завод № 2	$20-x$	$10-y$	$-5+x+y$

Вартість перевезення дорівнюватиме сумі добутків клітинок таблиці 1 на відповідні клітинки таблиці 2. Цільова функція (вартість перевезення) $S=5x+y+2(25-x-y)+30-x+3(10-y)+6(-5+x+y)=6x+2y+130$. Оскільки кількість тон хліба, які постачаються районам є величина додатна, то всі елементи таблиці 2 мають бути додатними.

Математична модель задачі

$$S=8x+2y+80 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 25 - x - y \geq 0, \\ 30 - x \geq 0, \\ 10 - y \geq 0, \\ -5 + x + y \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему нерівностей графічно

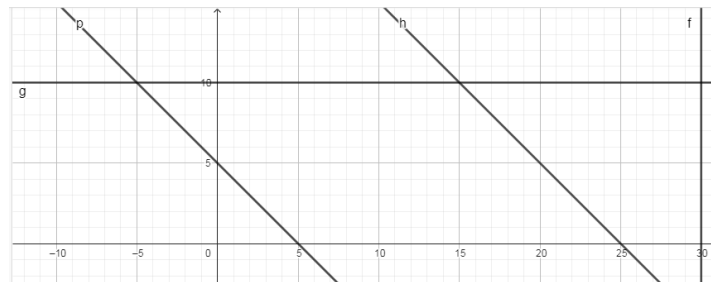
1. Оскільки x та y додатні, то область будемо тільки у першій чверті.
2. Будемо прями (з кожної нерівності визначаємо y)

$$f: x = 30$$

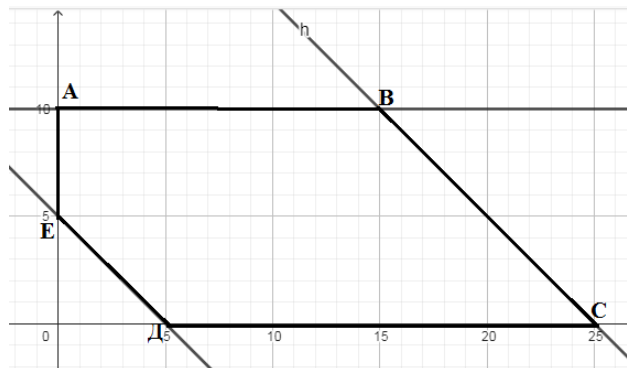
$$g: y = 10$$

$$h: y = 25 - x$$

$$p: y = 5 - x$$



3. Визначаємо розв'язок нерівностей – многокутник АВСДЕ.



4. Визначаємо координати вершин многокутника

A(0;10), C(25;0)

Координати точки В шукаємо з системи $\begin{cases} y = 10, \\ y = 25 - x \end{cases}$ B(15;10)

Координати точки Д шукаємо з системи $\begin{cases} y = 0, \\ y = 5 - x \end{cases}$ Д(5;0)

Координати точки Е шукаємо з системи $\begin{cases} x = 0, \\ y = 5 - x \end{cases}$ Е(0;5)

Знаходимо значення цільової функції у всіх точках.

$$S(A)=8 \cdot 0 + 2 \cdot 10 + 80 = 100$$

$$S(C)=8 \cdot 25 + 2 \cdot 0 + 80 = 280$$

$$S(Д)=8 \cdot 5 + 2 \cdot 0 + 80 = 120$$

$$S(B)=8 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 80 = 220$$

$$S(E)=8 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 80 = 90$$

Найменше значення цільова функція приймає в точці Е, отже $x=0$, $y=5$.

Обраховуємо таблицю 2 при $x=0$, $y=5$.

	Перший район	Другий район	Третій район
Завод № 1	0	5	20
Завод № 2	30	5	0

Отримали найдешевший план перевезень.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Завдання. Виберіть завдання згідно варіанту.

1. Запишіть математичну модель задачі.
2. Побудуйте багатокутник розв'язків.
3. Визначите оптимальний план перевезень.

1

Район	I	II	III	
Завод 1	2	1	5	20
Завод 2	4	6	3	30
	10	20	20	

2

Район	I	II	III	
Завод 1	3	1	5	20
Завод 2	4	5	3	30
	20	10	20	

3

Район	I	II	III	
Завод 1	3	1	2	40
Завод 2	4	5	3	20
	10	30	20	

4

Район	I	II	III	
Завод 1	2	1	3	20
Завод 2	4	5	1	40
	30	20	10	

5

Район	I	II	III	
Завод 1	2	4	1	30
Завод 2	5	2	3	30
	10	20	30	

6

Район	I	II	III	
Завод 1	2	3	5	20
Завод 2	6	2	3	20
	10	20	10	

7

Район	I	II	III	
Завод 1	2	4	1	10
Завод 2	4	2	5	30
	10	10	20	

8

Район	I	II	III	
Завод 1	2	6	3	20
Завод 2	4	1	2	30
	10	10	30	

9

Район	I	II	III	
Завод 1	2	1	5	50
Завод 2	5	4	1	10
	10	30	20	

10

Район	I	II	III	
Завод 1	2	1	4	20
Завод 2	1	6	3	40
	30	20	10	

11

Район	I	II	III	
Завод 1	3	1	5	30
Завод 2	2	4	3	30
	20	30	10	

12

Район	I	II	III	
Завод 1	1	4	3	20
Завод 2	4	3	2	20
	10	20	10	

Район	I	II	III	
Завод 1	2	3	1	20
Завод 2	4	1	4	40
	10	30	20	

14

Район	I	II	III	
Завод 1	2	1	5	40
Завод 2	3	4	2	20
	40	10	10	

15

Район	I	II	III	
Завод 1	2	1	5	50
Завод 2	4	6	2	10
	10	10	40	

16

Район	I	II	III	
Завод 1	3	1	5	20
Завод 2	4	4	1	30
	10	20	20	

17

Район	I	II	III	
Завод 1	2	1	5	20
Завод 2	4	6	3	30
	10	20	20	

18

Район	I	II	III	
Завод 1	3	1	5	20
Завод 2	4	5	3	30
	20	10	20	

19

Район	I	II	III	
Завод 1	3	1	2	40
Завод 2	4	5	3	20
	10	30	20	

20

Район	I	II	III	
Завод 1	2	1	3	20
Завод 2	4	5	1	40
	30	20	10	

21

Район	I	II	III	
Завод 1	2	4	1	30
Завод 2	5	2	3	30
	10	20	30	

22

Район	I	II	III	
Завод 1	2	3	5	20
Завод 2	6	2	3	20
	10	20	10	

23

Район	I	II	III	
Завод 1	2	4	1	10
Завод 2	4	2	5	30
	10	10	20	

24

Район	I	II	III	
Завод 1	2	1	5	50
Завод 2	5	4	1	10
	10	30	20	

25

Район	I	II	III	
Завод 1	2	1	4	20
Завод 2	1	6	3	40
	30	20	10	

26

Район	I	II	III	
Завод 1	3	1	5	30
Завод 2	2	4	3	30
	20	30	10	

27

Район	I	II	III	
Завод 1	1	4	3	20
Завод 2	4	3	2	20
	10	20	10	

28

Район	I	II	III	
Завод 1	2	3	1	20
Завод 2	4	1	4	40
	10	30	20	

29

Район	I	II	III	
Завод 1	2	1	5	40
Завод 2	3	4	2	20
	40	10	10	

30

Район	I	II	III	
Завод 1	2	1	5	50
Завод 2	4	6	2	10
	10	10	40	

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 4

ТЕМА Побудова опорного плану транспортної задачі

МЕТА навчити будувати математичну модель транспортної задачі, будувати опорний план задачі різними методами.

Література:

Перхун Л. П., Шендрик В. В. та ін. Математичні методи дослідження операцій : підручник / Є. А. Лавров, – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 212

Теоретичні відомості

Метод північно-західного кута

В даному методі заповнення таблиці транспортної задачі починається з лівого верхнього кута. Запаси чергового постачальника використовуються для забезпечення потреб чергового споживача, аж доки не будуть вичерпані повністю. Потім використовують запаси наступного постачальника і т. д.

	B1		B2		B3		B4		B5		Запаси
A1		4		3		2		2		4	140
A2		1		4		8		4		1	180
A3		9		7		3		7		2	160
Потреби	60		70		120		130		100		480

Метод північно – західного кута

	B1	B2	B3	B4	B5	Запаси
A1	4 60	3 70	2 10	2	4	140
A2	1	4	8 110	4 70	1	180
A3	9	7	3	7 60	2 100	160
Потребу	60	70	120	130	100	480

$$F = 60 \cdot 4 + 70 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 110 \cdot 8 + 70 \cdot 4 + 60 \cdot 7 + 100 \cdot 2 =$$

$$240 + 210 + 20 + 880 + 280 + 420 + 200 = 2250 - \text{вартість перевезень}$$

Метод мінімальної вартості

В методі мінімальної вартості намагаються задовольнити потреби споживача за рахунок найбільш вигідного постачальника і заповнюють ту клітку, якій на даному кроці відповідає мінімальне значення c_{ij} . Чергову клітку заповнюють по тому ж алгоритму, що і в методі північно-західного кута. На кожному кроці виключається з розгляду один постачальник, або один споживач. Якщо запаси постачальника вичерпані, а відповідний рядок містить чергове мінімальне значення c_{ij} , то у відповідну клітку таблиці

заносять базисний нуль і, тільки після цього, рядок викреслюють. Аналогічно поступають з споживачем.

Метод мінімального тарифа

	<i>B1</i>	<i>B2</i>	<i>B3</i>	<i>B4</i>	<i>B5</i>	<i>Запаси</i>
<i>A1</i>	4	3	2 10	2 130	4	140
<i>A2</i>	1 60	4 20	8	4	1 100	180
<i>A3</i>	9	7 50	3 110	7	2	160
<i>Потреби</i>	60	70	120	130	100	480

$$F = 10 \cdot 2 + 130 \cdot 2 + 60 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 100 \cdot 1 + 50 \cdot 7 + 110 \cdot 3 = 20 + 260 + 60 + 80 + 100 + 350 + 330 = 1200 - \text{вартість перевезень}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Написати опорний план до задачі з практичної роботи № 5

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 5

ТЕМА Знаходження оптимального розв'язку транспортної задачі методом потенціалів.

МЕТА Навчитися розв'язувати транспортну задачу методом потенціалів.

Література:

Перхун Л. П., Шендрик В. В. та ін. Математичні методи дослідження операцій : підручник / Є. А. Лавров, – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 212

Теоретичні відомості

Алгоритм розв'язування транспортної задачі методом потенціалів

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи замкнута). За необхідності слід звести задачу до замкнутого типу.
2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі одним з відомих методів.
3. Перевірка опорного плану задачі на виродженість. За необхідності вводять нульові постачання.
4. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

Визначення потенціалів для кожного рядка і стовпчика таблиці транспортної

За основу виберемо план, складений по методу мінімальної вартості з попередньої практичної роботи. Оптимізуємо даний план за методом потенціалів. Для кожного i – го рядка та j – го стовпця введемо певну їх ознаку – потенціал. Складемо систему рівнянь (по базисних клітинках плану) для визначення потенціалів рядків і стовпців, використовуючи наступну формулу $U_i + V_j = C_{ij}$.

$$\begin{aligned} U_1 + V_3 &= 2; & U_2 + V_5 &= 1; \\ U_1 + V_4 &= 2; & U_3 + V_2 &= 7; \\ U_2 + V_1 &= 1; & U_3 + V_3 &= 3. \\ U_2 + V_2 &= 4; \end{aligned}$$

Прийmemo $U_1 = 0$. Тоді отримаємо наступний розв'язок системи:

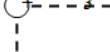
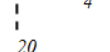
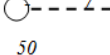
$$\begin{aligned} U_1 &= 0; & V_3 &= 2; & U_2 &= -2; & V_5 &= 3; \\ U_1 &= 0; & V_4 &= 2; & U_3 &= 1; & V_2 &= 6; \\ U_2 &= -2; & V_1 &= 3; & U_3 &= 1; & V_3 &= 2. \\ U_2 &= -2; & V_2 &= 6; \end{aligned}$$

Для кожної вільної клітинки введемо поняття її характеристики Δ_{ij} , яку будемо обчислювати за формулою: $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Тут u_i та v_j - потенціали відповідних рядка і стовпця, c_{ij} - тариф даного перевезення. Додатна характеристика вільної клітини свідчить про неоптимальність плану і є підставою для включення даної клітини в новий план. Обчислимо характеристики вільних клітин:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 3 - 4 = -1; \\ \Delta_{12} &= u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 6 - 3 = +3; \\ \Delta_{15} &= u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 3 - 4 = -1; \\ \Delta_{23} &= u_2 + v_3 - c_{23} = -2 + 2 - 8 = -8; \\ \Delta_{24} &= u_2 + v_4 - c_{24} = -2 + 2 - 4 = -4; \\ \Delta_{31} &= u_3 + v_1 - c_{31} = 1 + 3 - 9 = -5; \\ \Delta_{34} &= u_3 + v_4 - c_{34} = 1 + 2 - 7 = -4; \\ \Delta_{35} &= u_3 + v_5 - c_{35} = 1 + 3 - 2 = +2. \end{aligned}$$

Характеристики Δ_{12} і Δ_{35} є додатніми. Це свідчить про неоптимальність плану. Клітинку A_1B_2 необхідно включити в план. Деяку клітинку необхідно виключити з базису. Для цього складаємо цикл вільної клітини. Клітина A_1B_2 буде початком циклу.

Перерозподіл вантажопотоків по вершинах циклу - 1

	<i>B1</i>	<i>B2</i>	<i>B3</i>	<i>B4</i>	<i>B5</i>	<i>Заначу</i>
A1	4		2	2	4	140
A2	1		8	4	1	180
A3	9		3	7	2	160
<i>Потребу</i>	<i>60</i>	<i>70</i>	<i>120</i>	<i>130</i>	<i>100</i>	<i>480</i>

Будуємо цикл. Це є ламана лінія, вершини якої розташовані у клітинах таблиці, а ланки – вздовж рядків, чи стовпців. В кожній вершині циклу зустрічається дві ланки, одна з яких знаходиться у рядку, а друга у стовпці. Початковою вершиною завжди виступає вільна клітина. Всі інші вершини – це базисні клітини. Форма циклу – це прямокутник, “чобіт”, або ”вісімка”. Якщо ламана лінія, що утворює цикл перетинається, то точки самоперетину не є вершинами.

Початкову клітину циклу A_1B_2 помічаємо знаком “+”. Всі інші кутові вершини циклу по черзі помічаємо знаками “-” і ”+”. В якості перерозподілюваного елемента вибираємо число 10 (мінімальний вантаж серед усіх клітин помічених знаком “-”). До клітинок помічених знаком “+” додаємо число 10, від клітин помічених знаком “-” віднімаємо число 10. Клітина A_1B_2 входить у базис, клітина A_1B_3 виходить з базису. Отримуємо новий план

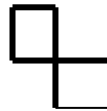
Види циклів.



прямокутник



“чобіт”



”вісімка”

	<i>B1</i>	<i>B2</i>	<i>B3</i>	<i>B4</i>	<i>B5</i>	<i>Запаси</i>
<i>A1</i>	4	3 10	2	2 130	4	140
<i>A2</i>	1 60	4 20	8	4	1 100	180
<i>A3</i>	9	7 40	3 120	7	2	160
<i>Потреби</i>	60	70	120	130	100	480

Вартість плану: $F = 30 + 260 + 60 + 80 + 100 + 280 + 360 = 1170$ Складаємо систему рівнянь для визначення потенціалів рядків і стовпців:

$$\begin{aligned} U_1 + V_2 &= 3; & U_2 + V_5 &= 1; \\ U_1 + V_4 &= 2; & U_3 + V_2 &= 7; \\ U_2 + V_1 &= 1; & U_3 + V_3 &= 3. \\ U_2 + V_2 &= 4; \end{aligned}$$

Прийmemo $U_1 = 0$. Тоді отримаємо наступний розв’язок системи:

$$\begin{aligned} U_1 &= 0; & V_2 &= 3; & U_2 &= 1; & V_5 &= 0; \\ U_1 &= 0; & V_4 &= 2; & U_3 &= 4; & V_2 &= 3; \\ U_2 &= 1; & V_1 &= 0; & U_3 &= 4; \\ U_2 &= 1; & V_2 &= 3; \end{aligned}$$

Обчислимо характеристики вільних клітин:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 0 - 4 = -4; \\ \Delta_{13} &= u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + (-1) - 2 = -3; \\ \Delta_{15} &= u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 0 - 4 = -4; \\ \Delta_{23} &= u_2 + v_3 - c_{23} = 1 + (-1) - 8 = -8; \\ \Delta_{24} &= u_2 + v_4 - c_{24} = 1 + 2 - 4 = -1; \\ \Delta_{31} &= u_3 + v_1 - c_{31} = 4 + 0 - 9 = -5; \\ \Delta_{34} &= u_3 + v_4 - c_{34} = 4 + 2 - 7 = -1; \\ \Delta_{35} &= u_3 + v_5 - c_{35} = 4 + 0 - 2 = +2. \end{aligned}$$

Характеристика Δ_{35} є додатною. Це свідчить про неоптимальність плану. Клітинку A_3B_5 необхідно включити в план. Деяку клітинку необхідно виключити з базису. Для цього складаємо цикл вільної клітини. Клітина A_3B_5 буде початком циклу.

Перерозподіл вантажопотоків по вершинах циклу - 2

	<i>B1</i>	<i>B2</i>	<i>B3</i>	<i>B4</i>	<i>B5</i>	<i>Запаси</i>
<i>A1</i>	4	3 10	2	2 130	4	140
<i>A2</i>	1 60	(+) 4 20	8	4	(-) 1 100	180
<i>A3</i>	9	(-) 7 40	3 120	7	(+) 2	160
<i>Потреби</i>	60	70	120	130	100	480

Будуємо цикл $A_3B_5 - A_3B_2 - A_2B_2 - A_2B_5$. В якості перерозподілюваного елемента вибираємо число 40 (мінімальний вантаж серед усіх клітин помічених знаком "-"). До клітинок помічених знаком "+" додаємо число 40, від клітин помічених знаком "-" віднімаємо число 40. Клітина A_3B_5 входить у базис, клітина A_3B_2 виходить з базису. Отримуємо новий план

	<i>B1</i>	<i>B2</i>	<i>B3</i>	<i>B4</i>	<i>B5</i>	<i>Запаси</i>
<i>A1</i>	4	3 10	2	2 130	4	140
<i>A2</i>	1 60	4 60	8	4	1 60	180
<i>A3</i>	9	7	3 120	7	2 40	160
<i>Потреби</i>	60	70	120	130	100	480

Вартість плану: $F = 30 + 260 + 60 + 240 + 60 + 360 + 80 = 1090$

Складаємо систему рівнянь для визначення потенціалів рядків і стовпців:

$$\begin{aligned} U_1 + V_2 &= 3; & U_2 + V_5 &= 1; \\ U_1 + V_4 &= 2; & U_3 + V_3 &= 3; \\ U_2 + V_1 &= 1; & U_3 + V_5 &= 2; \\ U_2 + V_2 &= 4; \end{aligned}$$

Прийmemo $U_1 = 0$. Тоді
отримаємо наступний
розв'язок системи:

$$\begin{aligned} U_1 &= 0; & V_2 &= 3; \\ U_1 &= 0; & V_4 &= 2; \\ U_2 &= 1; & V_1 &= 0; \\ U_2 &= 1; & V_2 &= 3; \\ U_2 &= 1; & V_5 &= 0; \end{aligned}$$

Обчислимо характеристики вільних клітин:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 0 - 4 = -4; \\ \Delta_{13} &= u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 2 = -1; \\ \Delta_{15} &= u_1 + v_5 - c_{15} = 0 + 0 - 4 = -4; \\ \Delta_{23} &= u_2 + v_3 - c_{23} = 1 + 1 - 8 = -6; \\ \Delta_{24} &= u_2 + v_4 - c_{24} = 1 + 2 - 4 = -1; \\ \Delta_{31} &= u_3 + v_1 - c_{31} = 2 + 0 - 9 = -7; \\ \Delta_{32} &= u_3 + v_2 - c_{32} = 2 + 3 - 7 = -2; \end{aligned}$$

Висновок. Оптимальний план має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 130 & 0 \\ 60 & 20 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 40 \end{pmatrix} \quad F_{\min} = 1090.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

1. Побудуйте опорний план транспортної задачі
 - а) методом північно-західного кута,
 - б) методом мінімальної вартості,
 - в) методом подвійної переваги.
2. Знайдіть оптимальний план транспортної задачі методом потенціалів.

№ п/п	
1	$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, A = (30, 50, 20), B = (10, 20, 40, 30)$
2	$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, A = (30, 50, 20), B = (10, 20, 40, 30)$
3	$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, A = (30, 50, 20), B = (10, 20, 40, 30)$
4	$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, A = (30, 50, 20), B = (10, 20, 40, 30)$
5	$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, A = (30, 50, 20), B = (10, 20, 40, 30)$
6	$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, A = (30, 50, 20), B = (10, 20, 40, 30)$
7	$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, A = (30, 50, 20), B = (10, 20, 40, 30)$
8	$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, A = (30, 50, 20), B = (10, 20, 40, 30)$

9	$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, A = (30, 50, 20), B = (10, 20, 40, 30)$
10	$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, A = (30, 50, 20), B = (10, 20, 40, 30)$

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 6

ТЕМА Розв’язування задачі лінійного програмування в MS Excel.

МЕТА використання програми MS Excel для розв’язання економічних задач

Література:

Яровий А. А. Математичні методи дослідження операцій. Лінійне програмування. Частина 1 : навчальний посібник / А. А. Яровий, Л. М. Ваховська, Л. В. Крилик. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 86 с

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

Розв’язування задачі лінійного програмування в MS Excel

Розв’яжемо задачу з практичної роботи №1 в електронній таблиці
 $S = 8x + 2y + 80 \rightarrow \min$,

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 25 - x - y \geq 0, \\ 30 - x \geq 0, \\ 10 - y \geq 0, \\ -5 + x + y \geq 0. \end{cases}$$

1. В електронній таблиці вибираємо клітинки в яких буде значення x та y . Це клітинки A2 і B2(вгорі вони підписані). В клітинку D2 вводимо цільову функцію, в клітинки A3:C4 ліві частини обмежень (як у таблиці 2)

	A	B	C	D
1	x	y		S
2	0	0	=25-A2-B2	=8*A2+2*B2+80
3	=30-A2	=10-B2	=-5+A2+B2	
4				

2. Вибираємо Дані – Пошук розв’язку і заповнюємо вікно (нерівності вводимо через добавить)

3. Натискаємо Виконати.

В клітинці A2 ми отримали значення $x=0$, в B2 маємо $y=5$

і оптимальний план перевезень, найменша вартість перевезень 90.

	A	B	C	D
1	x	y		S
2	0	5	20	90
3	30	5	0	

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Розв'язати завдання практичної роботи № 3 у програмі MS Excel

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 7

Тема: Диференціальне числення функції однієї змінної. Дослідження функції та побудова графіка.

Мета: Закріпити вміння та навички обчислення похідної функції однієї змінної, застосовувати їх до дослідження функції та побудови графіка.

Література:

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2017., 648 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. – К.: А.С.К., 2017., 480 с.

Теоретичні відомості

Загальна схема дослідження графіка функції:

1. Область визначення функції.
2. Дослідження на парність чи непарність.
3. Дослідження на періодичність.
4. Точки перетину з осями координат.
5. Інтервали знакопостійності.
6. Асимптоти графіка.
7. Дослідження на монотонність.
8. Екстремуми функції.
9. Інтервали опуклості та точки перегину.
10. Побудова графіка.

Приклад. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = x + \ln(x^2 - 1)$.

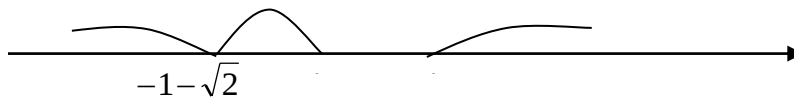
Область визначення: $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow D(y) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Область значень $E(y) = (-\infty, +\infty)$.

Функція загального вигляду, неперіодична, має дві точки перетину з віссю ОХ, що є коренями рівняння $0 = x + \ln(x^2 - 1)$. Знайти ці точки можна тільки приблизно (один з методів - графічний, що дозволяє визначити існування тільки одного кореня), але ми цього робити не будемо.

$$y' = 1 + \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}.$$

Похідна не є визначеною при $x = \pm 1$ і обертається в нуль при $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Точка $x = -1 + \sqrt{2}$ не входить в область визначення даної функції. Таким чином, критичні точки розбивають область визначення на ділянки з наступним розподілом знаків першої похідної:

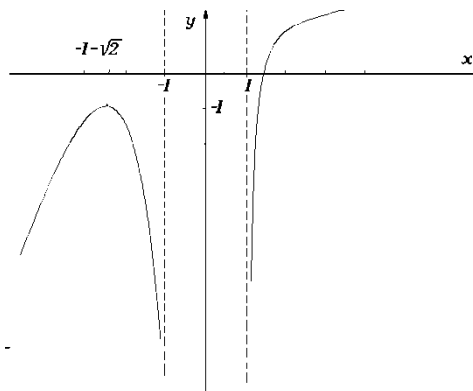


При $x \in (-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (1, +\infty)$ функція зростає, при $x \in (-1 - \sqrt{2}; -1)$ функція спадає. Звідси випливає, що точка $x = -1 - \sqrt{2}$ є точкою максимуму функції і

$$y_{\max} = y(-1 - \sqrt{2}) = -1 - \sqrt{2} + \ln((-1 - \sqrt{2})^2 - 1) \approx -0,7.$$

Так як $y'' = -2 \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0$, то точок перегину немає і функція на

всій області визначення опукла догори. Графік функції має вид:



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Виконати дослідження та побудувати графік функції

1. $y = 8 - 2x - x^2$.

14. $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

2. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$.

15. $f(x) = x^3 - 3x$.

3. $y = 4x^2 - x^4 - 3$.

16. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

4. $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2$.

17. $f(x) = 1 - \frac{5}{2}x^2 - x^5$.

5. $y = \frac{4x^3 - x^4}{5}$.

18. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

6. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

19. $y = \frac{1}{1+x^2}$.

7. $y = \frac{1}{3} - 4x + 2,5x^2 - \frac{1}{3}x^3$.

20. $y = 3 - 3x + x^3$.

8. $y = \frac{2x^2}{1+x^2}$.

21. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x$.

9. $y = 2x^3 - 6x$.

22. $y = \frac{1}{9}x(x-4)$.

10. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

23. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

11. $y = \frac{x}{9+x^2}$.

24. $y = \frac{3x^2}{x^2+1}$.

12. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 3,5x^2 - 10x - \frac{1}{3}$.

25. $y = 3 + 8x^2 - x^4$.

13. $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

26. $y = 2x^4 - 16x^2 + 9$

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 8

Тема: Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла

Мета: Закріпити вміння та навички обчислення визначеного інтеграла.

Література:

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2017., 648 с.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. – К.: А.С.К., 2017., 480 с.

Теоретичні відомості

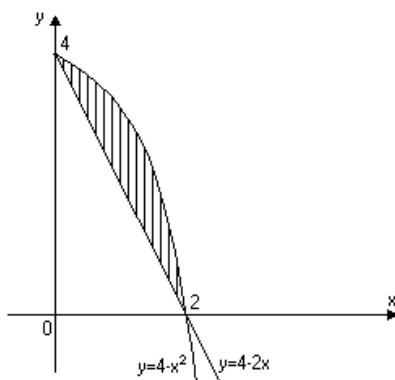
Застосування визначених інтегралів до задач геометрії

- Площу криволінійної трапеції для неперервної на сегменті $[a;b]$ функції $y=f(x)>0$, згідно геометричного змісту інтеграла, обчислюють за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

- Об'єм тіла обертання криволінійної трапеції з основою $[a;b]$ навколо осі Ox , яка обмежена неперервною функцією $y=f(x)$, обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$



Приклад 28. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y = 4 - x^2$ та $y = 4 - 2x$.

Розв'язання. Зобразимо фігуру.

Знайдемо точки перетину ліній. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 4 - 2x, \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = 4 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0, \quad x_1 = 0, x_2 = 2$$

Площа фігури дорівнює різниці площ двох криволінійних трапецій, площі яких обчислимо за формулою. Одержимо

$$\begin{aligned} S &= S_2 - S_1 = \int_0^2 (4 - x^2) dx - \int_0^2 (4 - 2x) dx = \\ &= \int_0^2 (4 - x^2 - 4 + 2x) dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \\ &= \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ (кв.од.)} \end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Обчислити площу області, обмеженої графіками функцій. Зробити малюнок області.

1. $y = 2^x$, $y = 2x - x^2 + 1$.
2. $y = -2x^2$, $y = 1 - 3x^2$.
3. $x^2 = 4y$, $y = \frac{8}{x^2 + 4}$.
4. $y = x^2 + 1$, $x + y = 3$.
5. $y = e^{2x}$, $y = 2^{-x}$, $x = 1$.
6. $y = x + 1$, $y = \cos x$ та віссю Ox .
7. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2 - x}$ та віссю Ox .
8. $y = (x - 4)^2$, $y = 16 - x^2$ та віссю Ox .
9. $y = \sqrt{x + 1}$, $y = \sqrt{1 - x}$ та віссю Ox .
10. $y = -x^2 - 2x + 3$, дотичною до цієї параболи в точці $M(2; -5)$ та віссю ординат.
11. $y = x^3 + 3$, $y = x - 1$, $x = 0$, $x = 2$.
12. $y = \arctg x$, $y = 0$, $x = \sqrt{3}$.
13. $y = \frac{4}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.
14. $y = x^2 - 2x + 2$, дотичною до цієї параболи в точці $M(2; 2)$ та віссю ординат.
15. $y = x^3 + 2$, $y = x - 2$, $x = 0$, $x = 2$.

16. $y = x^3 + 1, y = x - 3, x = 0, x = 2.$
17. $y = x^3 - 1, y = x - 5, x = 0, x = 2.$
18. $y = x^3 - 2, y = x - 6, x = 0, x = 2.$
19. $y = e^x - 1, y = 0, x = \ln 2.$
20. $x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y.$
21. $y = (x - 1)^2, y^2 = x - 1.$
22. $y = (x - 2)^3, 4x - y - 8 = 0.$
23. $y = x^2(1 - x)$ та віссю абсцис.
24. $y = 2^{x+1} + 2, y = 4 - x, x = 4.$
25. $y = x^3 + 3, y = x + 7, x = 0, x = -2.$
26. $y = x - x^2$ та віссю абсцис.
27. $y = x^3 + 1, y = x + 5, x = 0, x = -2.$
28. $y = (x + 1)^2, y + 2x - 13 = 0.$
29. $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1.$
30. $y = x^3 - 2, y = x - 6, x = 0, x = 2.$

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 9

Тема: Диференціальні рівняння.

Мета: Поглибити вміння та навички розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку та диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.

Література:

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2017., 648 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. – К.: А.С.К., 2017., 480 с.

Основні теоретичні відомості та вказівки

Означення: Рівняння, яке містить невідому функцію та її похідні, називається *диференціальним*.

Означення: *Порядком диференціального рівняння* називається порядок старшої похідної, яка входить до його складу.

Всяка функція $\varphi(x)$, яка зв'язує змінні та обертає рівняння у тотожність, називається *розв'язком диференціального рівняння*.

Будь-яка крива, задана рівнянням $y = \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – деякий розв'язок рівняння $y' = f(x; y)$, називається *інтегральною кривою*.

Задача знаходження розв'язку рівняння $y' = f(x; y)$, який задовольняє умові $y(x_0) = y_0$, де x_0, y_0 – задані числа, називається *задачею Коші*. Умова $y(x_0) = y_0$ називається *початковою умовою*.

Геометрично розв'язати задачу Коші означає знайти таку інтегральну криву, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$.

Множина всіх розв'язків диференціального рівняння задається формулою $y = \varphi(x; C)$, де $C = \text{const}$. Ця функція називається *загальним розв'язком диференціального рівняння*.

Кожний розв'язок диференціального рівняння, який отримується із загального розв'язку при конкретному значенні постійної C , називається *частинним розв'язком диференціального рівняння*.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Означення: Диференціальні рівняння виду $y' = f(x) \cdot g(y)$, де $f(x)$ та $g(y)$ – задані функції, називаються *диференціальними рівняннями з відокремлюваними змінними*.

Для розв'язку таких диференціальних рівнянь використовують запис похідної у диференціалах: $y' = \frac{dy}{dx}$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь

$$y' = \frac{y^4}{x-1}$$

Це рівняння з відокремленими змінними.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^4}{x-1}, \quad \frac{dy}{y^4} = \frac{dx}{x-1}, \quad \int \frac{dy}{y^4} = \int \frac{dx}{x-1}, \quad \frac{y^{-4+1}}{-4+1} = \ln|x-1| + C.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд $\frac{y^{-3}}{-3} = \ln|x-1| + C$, де C – довільна стала.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $xydx + (x+1)dy = 0$.

2. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$.

3. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1$.

4. $y' \operatorname{ctgx} + y = 2, \quad y(0) = -1$.

5. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(2) = 0$.

6. $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 1/2$.

7. $2xyy' + y^2 = 2$.

8. $y' - xy^2 = 2xy$.

9. $e^{-y} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) = 1$.

10. $y' = 10^{x+y}$.

11. $y \frac{dy}{dx} + x = 1$.

12. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$.

13. $xydy + (1+y^2)dx = 0$.

14. $y' \sin x - y \cos x = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

15. $(1+y^2)dx = xdy$.

16. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.

17. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0, \quad y(0) =$

18. $y \ln y dx + y dy = 0, \quad y(1) = 1$.

19. $y' = a^{x+y} (a > 0, a \neq 1)$.

20. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$.

21. $2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2)$.

22. $e^x \sin^3 y + (1+e^{2x}) \cos yy' = 0$.

23. $y^2 \sin x dx + \cos^2 x \ln y dy = 0$.

24. $\operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0$.

25. $xy' - y = y^3$.

26. $xyy' = 1 - x^2$.

27. $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$.

28. $y' \operatorname{tg} x = y$.

29. $(1+e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 1$.

30. $(xy^2+x)dx + (x^2y-y)dy = 0, \quad y(0) = 1$.

Вища математика [Текст]: Методичні вказівки до практичних занять для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр спеціальності 071 Облік і оподаткування /уклад. Жанна Кривош. – Ковель: ВСП «КПЕФК ЛНТУ», 2025. – 40 с.

Комп'ютерний набір і верстка: Жанна КРИВОШ

Редактори: Жанна КРИВОШ

Підп. до друку «___»_____2025. Формат 60x84/16. папірофіс.

Гарн.Таймс. Ум.друк. арк. ____ Обл.-вид. арк. ____ Зам. ____

Тираж ____ прим.

ВСП «КПЕФК ЛНТУ»
45000 м. Ковель, вул. Заводська, 23
Друк – ВСП «КПЕФК ЛНТУ»