

Зміст

Передмова.....	4
РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ.....	5
§1.1. Матриці. Основні дії над матрицями. Ранг матриці.....	5
§1.2. Обернена матриця.....	9
§1.3. Системи лінійних рівнянь.....	10
§1.4. Матричний запис системи лінійних рівнянь і її розв'язування.....	10
§1.5. Розв'язування систем лінійних рівнянь за методом Гауса.....	11
§1.6. Розв'язування системи трьох лінійних рівнянь. Правило Крамера....	13
§1.6. Однорідна система лінійних рівнянь.....	14
§1.7. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь. Теорема Кронекера– Капеллі.....	15
Завдання для самоконтролю.....	16
РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ.....	17
§2.1. Скалярні і векторні величини.....	17
§2.2. Лінійні дії з векторами.....	18
§2.3. Проекції вектора на вісь.....	19
§2.4. Розкладання вектора на складові.....	20
§2.5. Дії над векторами, заданими своїми координатами.....	22
§2.6. Розкладання вектора за базисом. Лінійна незалежність векторів.....	22
§2.7. Скалярний добуток векторів.....	24
§2.8. Вираження скалярного добутку через координати. Кут між векторами.....	25
§2.9. Векторний добуток двох векторів.....	25
§2.10. Векторний добуток двох векторів, заданих координатами.....	26
§2.11. Мішаний добуток векторів.....	26
Завдання для самоконтролю.....	27
РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ.....	29
§3.1. Координати точки на прямій і на площині. Відстань між двома точками.....	29
§3.2. Полярна система координат.....	30
§3.3. Різні види рівнянь прямої на площині.....	31
§3.4. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Відстань від точки до прямої.....	32
§3.5. Коло.....	34
§3.6. Еліпс.....	35
§3.7. Гіпербола.....	37
§3.8. Парабола.....	39
Завдання для самоконтролю.....	40
РОЗДІЛ 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ.....	41
§4.1. Площина.....	41
§4.2. Пряма лінія у просторі.....	47
§4.3. Пряма і площина.....	50
Завдання для самоконтролю.....	51

Передмова

Навчально-методичний посібник відповідає програмі курсу “Вища математика” для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр (III курсу) за спеціальністю 133 Галузеве машинобудування

У посібнику наведено короткі теоретичні відомості з розділів “Лінійна алгебра”, “Аналітична геометрія” які проілюстровано прикладами, рисунками, зразками розв’язування типових задач. Кожний розділ містить запитання та задачі для перевірки засвоєння матеріалу.

Особливістю посібника є наявність завдань для семестрових розрахункових робіт, а також приклад розв’язування типового варіанта розрахункової роботи.

Структура посібника дає можливість відпрацьовувати техніку розв’язування задач розрахункових завдань без звертання до додаткової літератури.

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Лекція 1. Матриці. Основні дії над матрицями. Ранг матриці. Визначники та їх властивості.

Матрицею називається прямокутна таблиця з чисел (елементів матриці), що містить деяку кількість рядків та стовпців. Матриця A з елементами a_{ij} розміру $m \times n$ має m рядків та n стовпців і позначається так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Якщо матриця містить однакову кількість рядків і стовпців вона називається *квадратною*.

Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її *порядком*.

Матриця, у якій всього один рядок, називається *матрицею-рядком*, а матриця, у якій всього один стовпець, – *матрицею-стовпцем*.

Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратної матриці утворюють *головну діагональ*, а елементи $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ – *побічну діагональ*.

Якщо в матриці A поміняти місцями рядки і стовпчики, одержимо матрицю, яка називається *транспонованою до матриці A* і позначається A^T .

Квадратна матриця, в якій всі елементи, що знаходяться поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю, називається *діагональною матрицею*.

Діагональна матриця, всі елементи якої, що містяться на головній діагоналі, дорівнюють одиниці, називається *одиничною матрицею*:

Якщо A і B – матриці одного розміру, то вони вважаються *рівними*, якщо рівні їх відповідні елементи $a_{ij} = b_{ij}$.

Сумою матриць A і B є матриця C з елементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Операція додавання матриць можлива лише для матриць однакового розміру.

Добутком матриці A на число k є матриця B з елементами $b_{ij} = ka_{ij}$.

Добутком матриці A розміру $m \times n$ на матрицю B розміру $n \times k$ є матриця C , розміром $m \times k$, елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

(тобто елемент c_{ij} , який стоїть в i -му рядку та j -му стовпці матриці C , дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B). Операція множення двох матриць

можлива лише за умови, коли кількість стовпців першої матриці **A** дорівнює кількості рядків другої матриці **B**. Операція множення матриць не комутативна, тобто при множенні матриць не можна міняти місцями множники:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Слід відзначити, що $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$.

Будь-якій квадратній матриці

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можна поставити у відповідність певне число, яке називається *визначником цієї матриці* і позначається символом $\det \mathbf{A}$:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Прямокутна матриця визначника не має.

Рангом матриці **A** називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля, (позначається $r(\mathbf{A})$). Якщо всі елементи матриці $a_{ij} = 0$, то $r(\mathbf{A}) = 0$.

Крім безпосереднього обчислення мінорів, ранг матриці можна знайти простішим методом, який ґрунтується на тому, що ранг матриці не зміниться, якщо над матрицею виконати так звані *елементарні перетворення*, а саме:

- замінити рядки стовпцями (при цьому стовпці замінюються відповідними рядками);
- переставити місцями два рядки (стовпці);
- помножити кожен елемент рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;
- викреслити рядок (стовпець), всі елементи якого дорівнюють нулеві;
- додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

Всі ці перетворення не змінюють ранг матриці, але з їх допомогою матрицю зводять до матриці, у якій нижче головної діагоналі всі елементи – нулі. Тоді ранг матриці дорівнює кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля.

Приклад 1. Знайти матрицю $C = AB$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Кількість стовпців матриці $A_{2 \times 2}$ дорівнює кількості рядків матриці $B_{2 \times 3}$, тому за означенням маємо

$$C_{2 \times 3} = A_{2 \times 2} B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

називається *визначником (детермінантом) другого порядку*.

Вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

називається *визначником третього порядку*.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку Δ називається визначник другого порядку, який утворюється з Δ в результаті викреслювання рядка i та стовпця j , що містять a_{ij} .

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку називають його мінор M_{ij} , взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема. Кожний визначник можна подати як суму добутків елементів одного якого-небудь рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Наприклад, розкладання визначника за елементами другого стовпця здійснюють за формулою

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32},$$

де

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Основні властивості визначників:

1. Значення визначника не змінюється, якщо всі його рядки замінити відповідними стовпцями (стовпці при цьому замінюються відповідними рядками).
2. Визначник, що має нульовий рядок (стовпець) дорівнює нулю.
3. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.
4. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак.
5. Спільний множник елементів деякого рядка (стовпця) можна винести множителем за знак визначника.
6. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.
7. Визначник, що має два пропорційні рядки (стовпці), дорівнює нулю.
8. Якщо у визначнику деякий (наприклад, i -й) рядок є сумою двох доданків, то цей визначник можна подати у вигляді суми двох визначників, у яких усі рядки, крім i -го, будуть такі, як у даному визначнику; i -й рядок першого визначника складатиметься з перших доданків, а i -й рядок другого визначника складається з других доданків.

Приклад 2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ за правилом

трикутника.

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 3 = -10.$$

Приклад 3. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за

елементами третього рядка.

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9.$$

Лекція 2. Обернена матриця

Нехай A – деяка квадратна матриця n -го порядку.

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A , якщо виконується умова

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

де E – одинична матриця.

Квадратна матриця A називається *виродженою*, якщо $\det A = 0$ й *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Теорема. Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невинродженою.

Обернена матриця знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці A .

Приклад 1. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Обчислимо визначник матриці A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2.$$

Матриця A невинроджена, тому обернена матриця знаходиться за формулою (1.6). Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11; & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -13; & A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -19; \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14; \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 9; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13. \end{aligned}$$

Складемо обернену матрицю

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 & 8 & -7 \\ 13 & 10 & -9 \\ 19 & 14 & -13 \end{pmatrix}.$$

Лекція 3. Системи лінійних рівнянь

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими називається система виду

[illegible]

де a_{ij} – коефіцієнти, b_i – вільні члени, x_i – невідомі, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Розв'язком системи лінійних рівнянь називається впорядкована сукупність n чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, які при підстановці в систему (1.7) як невідомі, перетворюють усі рівняння в тотожності.

Система рівнянь (1.7) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і *неоднорідною*, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має безліч розв'язків.

Дві системи лінійних рівнянь називаються *еквівалентними*, якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків.

Матричний запис системи лінійних рівнянь і її розв'язування

Нехай задано систему, яка містить n лінійних рівнянь з n невідомими.

Введемо матриці

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що матриця $\mathbf{A}$ має обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$.

TO

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x + y + 2z = 5 \\ 3x + z = -2 \end{cases}$$

Розв'язування.

Маємо

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Знаходимо

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$.

Приклад 2. Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ x + y - z = 0; \\ 4x - y + 5z = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - y + 2z = -1; \\ -x + 2y - 3z = 3; \\ 2x - y + 3z = 2; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} -x + y + 2z = 1; \\ x + 2y - z = 2; \\ 2x + y - 3z = 1; \\ x + 5y = 5. \end{cases}$$

Розв'язування.

а) Виконуємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці даної системи (позначатимемо це символом $\Rightarrow$):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, задана система еквівалентна системі

$$\begin{cases} x + y - z = 0; \\ 0 \cdot x + y - 4z = -5; \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + z = 2. \end{cases}$$

і має єдиний розв'язок: $z = 2$, $y = 3$, $x = -1$.

б) Маємо

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, задана система еквівалентна системі

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1; \\ 0 \cdot x + y - z = 2; \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2. \end{cases}$$

В останньому рівнянні вільний член дорівнює двом, а коефіцієнти при невідомих дорівнюють нулю (тобто $0=2$), тому система несумісна.

в) Маємо

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, задана система еквівалентна системі трапецієподібного вигляду

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 1; \\ 0 \cdot x + 3y + z = 3 \end{cases}$$

і має безліч розв'язків. З останньої системи знаходимо $x = \frac{5}{3}t$, $y = 1 - \frac{t}{3}$, $z = t$, де t — довільне число ($-\infty < t < \infty$).

Розв'язування системи трьох лінійних рівнянь.

Правило Крамера

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими x_1 , x_2 , x_3 :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

(коефіцієнти $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$, і вільні члени b_1, b_2 і b_3 вважаються заданими).

Визначник Δ , який називається *визначником системи*, записується так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Визначники Δ_1, Δ_2 , і Δ_3 , утворюються з визначника відповідно заміною першого, другого і третього стовпців стовпчиком вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

При розв'язуванні системи рівнянь можуть бути такі три випадки:

1. $\Delta \neq 0$, тоді система має єдиний розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Формули називають *формулами Крамера*.

2. Якщо $\Delta = 0$, а принаймні один із визначників $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ не дорівнює нулю, то система розв'язків не має.

3. Якщо $\Delta = 0$, і $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0$, то система має безліч розв'язків.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x - y + z = 0; \\ 2x + y + z = 5; \\ 2y - z = 3. \end{cases}$$

Розв'язування.

Знаходимо визначники $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

За формулами

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Однорідна система лінійних рівнянь

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0; \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0; \\ c_1x + c_2y + c_3z = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Ця система завжди має нульовий розв'язок $x=0$, $y=0$, $z=0$, тому що підстановка нулів замість невідомих в кожне з рівнянь (1.12) перетворює їх у тотожність.

Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то система (1.12) має *лише єдиний нульовий розв'язок*.

Якщо визначник системи $\Delta = 0$, то система (1.12) має *безліч розв'язків*. Розглянемо такі два випадки.

1. Припустимо, що у визначнику системи Δ існує *принаймні один відмінний від нуля мінор другого порядку*. Нехай, наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.13)$$

Візьмемо ті рівняння системи (1.12), що містять відмінний від нуля мінор, і запишемо їх у вигляді

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = -a_3z \\ b_1x + b_2y = -b_3z \end{cases} \quad (1.14)$$

Оскільки визначник (1.13) системи (1.14) відмінний від нуля, то за формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta_x z}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y z}{\Delta}, \quad (1.15)$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Оскільки z може набувати будь-яких дійсних значень, $z = \Delta \cdot t$, де t — довільне дійсне число, тоді з формул (1.15)

$$x = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot t; \quad y = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \cdot t; \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot t. \quad (1.16)$$

2. Нехай тепер визначник системи (1.12) і *всі його мінори другого порядку дорівнюють нулю*. Це значить, що коефіцієнти всіх трьох рівнянь (1.12) пропорційні, тому система зводиться до одного рівняння з трьома невідомими. Надаючи двом невідомим довільних значень, знаходять відповідне їм третє невідоме.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} -x + y - 2z = 0; \\ x - y + 2z = 0; \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

Розв'язування.

Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

тому система невизначена. Усі мінори другого порядку, що містяться у першому і другому рядках визначника, дорівнюють нулю. Тому візьмемо друге і третє рівняння системи:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0; \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

Ці рівняння містять відмінний від нуля мінор другого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

тому за формулами (1.16) маємо

$$x = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot t = -t; \quad y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t = 5t; \quad z = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot t = 3t.$$

Отже, система має безліч розв'язків: $x = -t$, $y = 5t$, $z = 3t$, де t – довільне дійсне число.

Критерій сумісності системи лінійних рівнянь.

Теорема Кронекера–Капеллі

Нехай задано систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

[illegible]

Складемо основну матрицю A і розширену матрицю $\tilde{A}$ даної системи:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Вичерпну відповідь на запитання про існування розв'язку системи (1.17) дає теорема Кронекера–Капеллі.

Теорема Кронекера–Капеллі. Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший числа невідомих, то система має безліч розв'язків.

Завдання для самоконтролю

1. Дати визначення матриці.
2. Які матриці називаються рівними?
3. Навести приклади матриці-рядка і матриці-стовпця.
4. Дати визначення діагональної матриці.
5. Записати одиничну матрицю 4-го порядку.
6. Навести приклад симетричної матриці 3-го порядку.
7. Для матриць якого розміру існує визначник?
8. Яка матриця називається невиродженою?
9. Які матриці будуть переставними?
10. Задані матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю C , якщо:

$$\text{а) } C = A + 3B; \quad \text{б) } C = -2A + B.$$

11. Задані матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислити добуток матриць:

$$\text{а) } A \cdot B; \quad \text{б) } A \cdot C.$$

12. Знайти матрицю X із рівняння:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } X \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

13. Дослідити систему та знайти розв'язок:

1) за формулами Крамера;

2) за допомогою оберненої матриці;

3) за методом Гаусса.

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$$

14. Визначити, за яких значень α і β система рівнянь має:

- 1) єдиний розв'язок;
- 2) не має розв'язків;
- 3) безліч розв'язків.

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 4y = \alpha \\ 6x - \beta y = 8. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \alpha x - 3y = 2 \\ 4x - 6y = \beta. \end{cases}$$

РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Лекція 1. Вектори на площині і в просторі. Дії над векторами.

Скалярними величинами, або *скалярами*, називаються величини, які визначаються тільки числовими значеннями, наприклад: час, маса, густина, довжина, площа, об'єм тощо.

Величини, які крім числового значення, мають ще й напрям (швидкість, сила, напруженість магнітного поля тощо), називаються *векторними*.

Будь-яка упорядкована пара точок A і B простору визначає напрямлений відрізок, або *вектор*, тобто відрізок, що має певну довжину і певний напрям. Першу точку A називають *початком вектора*, а другу B – *кінцем вектора*. Напрямом вектора вважають напрям від його початку до кінця. Вектор, початок якого знаходиться в точці A , а кінець – у точці B , позначається символом $\vec{AB}$ або $\vec{a}$. Відстань між початком вектора і його кінцем називається *довжиною* (або *модулем*) *вектора* і позначається $|\vec{a}|$ або $|\vec{AB}|$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним*. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називають *ортом* вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}^0$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково направлені і мають рівні довжини.

Три вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній або в паралельних площинах.

В аналітичній геометрії вектори називаються вільними і тому їх можна переносити паралельно самим собі.

До лінійних дій з векторами належать додавання і віднімання векторів, множення вектора на число.

1) *Додавання векторів*. Вектори додаються геометрично за правилом паралелограма або за правилом трикутника.

За *правилом паралелограма* сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який виходить з їхнього спільного початку і є діагоналлю паралелограма, сторонами якого є ці самі вектори (рис. 2.1). Позначають це так: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

Два вектори можна додавати один до другого також за *правилом трикутника*: сума двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\vec{c}$, направлений з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис. 2.2).

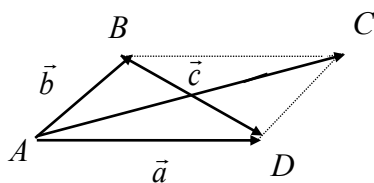


Рис. 2.1

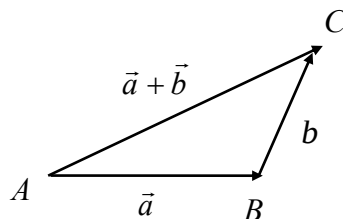


Рис. 2.2

2) *Віднімання векторів*. Віднімання двох векторів визначається як дія, обернена додаванню.

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, який будучи додатний до вектора $\vec{b}$, дає вектор $\vec{a}$, тобто

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}, \quad \text{якщо} \quad \vec{c} + \vec{b} = \vec{a}.$$

Протилежними називаються два вектори $O\vec{A}$ і $O\vec{A}_1$, які мають однакові довжини, але протилежні напрями. Якщо вектор $O\vec{A}_1$ протилежний вектору $O\vec{A}$, то можна записати:

$$O\vec{A}_1 = -O\vec{A}.$$

Тоді різницю $\vec{a} - \vec{b}$ можна тлумачити ще й так: відняти від вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, це все одно, що до вектора $\vec{a}$ додати вектор, протилежний вектору $\vec{b}$, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

3) *Множення вектора на число*. При множенні вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ отримаємо вектор $\vec{b}$, колінеарний до вектора $\vec{a}$, такий, що має довжину в $|\lambda|$ разів більшу, ніж $|\vec{a}|$:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

Цей новий вектор $\vec{b}$ має однаковий напрям з вектором $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний до нього напрям, якщо $\lambda < 0$.

Лінійні операції над векторами мають такі властивості:

- Комутативність відносно додавання векторів:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- Асоціативність відносно додавання векторів:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

- Асоціативність відносно множення чисел:

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

- Дистрибутивність відносно додавання чисел:

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

- Дистрибутивність відносно додавання векторів:

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

Проекції вектора на вісь

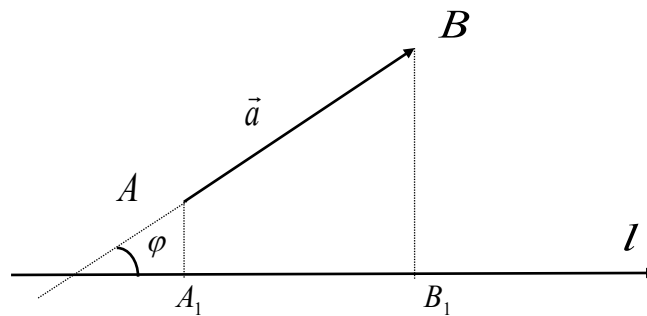


Рис. 2.3

Алгебраїчною проекцією вектора $\vec{AB}$ на вісь l називається число, що дорівнює довжині відрізка A_1B_1 цієї осі, який міститься між проекціями A_1 і B_1 його початкової точки A і кінцевої точки B , взятій зі знаком плюс, якщо напрям відрізка A_1B_1 збігається з напрямом осі l , і – зі знаком мінус, якщо ці напрями протилежні (рис. 2.3).

Проекція вектора $\vec{AB}$ на вісь l виражається формулою

$$\text{Пр}_l \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \varphi \quad \text{або} \quad \text{Пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi,$$

де φ – кут нахилу вектора до осі l .

Розкладання вектора на складові

Розглянемо прямокутну систему координат $Oxyz$ і довільний вектор $\overline{OM}$ (рис. 2.4).

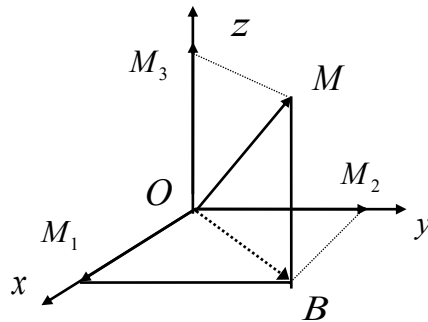


Рис. 2.4

З рис.2.4 видно, що вектор $\overline{OM}$ можна подати у вигляді суми трьох векторів, що лежать на даних осях координат:

$$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{OM}_3 = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3. \quad (2.1)$$

Вектори $\overline{OM}_1$, $\overline{OM}_2$, $\overline{OM}_3$ називаються *складовими* вектора $\overline{OM}$ відносно системи координат $Oxyz$ або його *компонентами*.

Модулі векторів $\overline{OM}_1$, $\overline{OM}_2$, $\overline{OM}_3$ дорівнюють модулям проєкцій вектора $\overline{OM}$ відповідно на осі x , y , z . Отже, довільний вектор можна розкласти на три складові вектори, що лежать на осях координат.

Тепер від точки O в додатному напрямі кожної координатної осі відкладемо вектори, довжина яких дорівнюватиме одиниці. Такі вектори називаються *одиничними векторами* або *ортами* і позначаються відповідно через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (рис. 2.5).

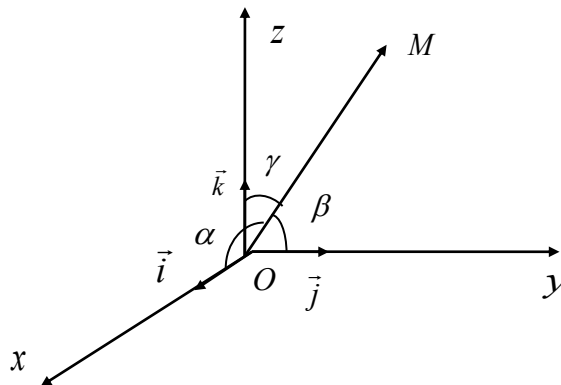


Рис. 2.5

Повертаючись до рівності (2.1), зазначимо, що вектор $\overline{OM}_1$, як і вектор $\vec{i}$, розташований на осі абсцис, тому

$$\overline{OM}_1 = Xi\vec{i},$$

де X – довжина вектора $\overline{OM}_1$, взята зі знаком плюс, якщо напрями векторів $\overline{OM}_1$ і $\vec{i}$ збігаються, або зі знаком мінус, якщо їх напрями протилежні. Інакше кажучи, X – число, що є проекцією вектора $\overline{OM}$ на вісь абсцис.

Аналогічно одержуємо:

$$\overline{OM}_2 = Y \vec{j} \quad \text{і} \quad \overline{OM}_3 = Z \vec{k}.$$

Тоді рівність (2.1) запишеться так:

$$\overline{OM} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}. \quad (2.2)$$

Рівність (2.2) дає розкладання вектора за базисними одиничними векторами, або за ортами $\vec{i}, \vec{j}$ і $\vec{k}$.

Замість повного запису (2.2) часто користуються скороченим $\overline{OM} = \{X; Y; Z\}$. Тут X, Y, Z позначають проекції вектора $\overline{OM}$.

Довжину вектора $\overline{OM}$ визначаємо за формулою

$$|\overline{OM}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Якщо дані дві точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, які є відповідно початком і кінцем вектора $\vec{a} = \overline{AB}$, то його проекції на осі координат відповідно дорівнюють:

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1,$$

тоді вектор $\vec{a}$ можна записати у такому вигляді:

$$\vec{a} = \overline{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Його довжину визначаємо за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.3)$$

Позначаючи через α, β, γ кути вектора $\vec{a}$ з осями координат, отримуємо:

$$\cos \alpha = \frac{X}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{|\vec{a}|}, \quad (2.4)$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ називаються *напрямними косинусами* вектора $\vec{a}$.

Напрямні косинуси вектора задовольняють умові

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Одиничний вектор має своїми компонентами його напрямні косинуси.

Дії над векторами, заданими своїми координатами

1. При додаванні векторів їх однойменні координати додаються. Якщо дані вектори

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},$$

тоді

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}.$$

2. При відніманні векторів їх однойменні координати віднімаються:

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}.$$

3. При множенні вектора на число координати вектора множаться на це число:

$$\lambda\vec{a} = \lambda x_1\vec{i} + \lambda y_1\vec{j} + \lambda z_1\vec{k}.$$

4. Умовою колінеарності двох векторів є пропорційність однойменних координат

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Лекція 2. Розкладання вектора за базисом. Лінійна незалежність векторів

Візьмемо множину векторів, які лежать на одній прямій. Очевидно, для будь-яких двох з них виконується умова $\vec{c} = \lambda\vec{a}$, де $\lambda \in R$. Тоді беручи за основу (базис) один з них, скажімо, $\vec{a}$, усі інші вектори можна виразити через $\vec{a}$ за допомогою операції множення $\vec{a}$ на деякий скаляр.

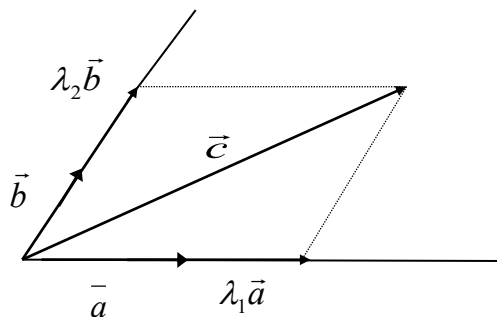


Рис. 2.6

Далі візьмемо три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, які паралельні одній площині (компланарні вектори), причому $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не паралельні один одному. В даному випадку, беручи за базис $\vec{a}$ і $\vec{b}$, вектор $\vec{c}$ можна подати через вектори базису (рис. 2.6), тобто записати

$$\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b},$$

де $\lambda_1 \in R, \lambda_2 \in R (\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0)$.

Останнє співвідношення називають *розкладанням вектора за даним базисом*. Можна показати, що цей розклад єдиний. Отже, базис на площині – це два довільні неколінеарні вектори.

Аналогічно, в просторі, беручи за базис три довільні некомпланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, будь-який вектор $\vec{d}$ можна подати у вигляді

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c},$$

при цьому скаляри $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ називаються *координатами*, а вектори $\lambda_1 \vec{a}, \lambda_2 \vec{b}, \lambda_3 \vec{c}$ – *компонентами* вектора $\vec{d}$ у базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Наведемо більш загальні означення й міркування.

Визначення. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, називаються *лінійно залежними*, якщо існують такі дійсні $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ одночасно не рівні нулю, що

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0 \quad (2.5)$$

Визначення. Ці самі вектори називаються *лінійно незалежними*, якщо (2.5) справедливо лише за умови $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Визначення. Вектор $\vec{b}$ називається *лінійною комбінацією* векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ якщо існують одночасно ненульові λ_i , а такі, що

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n.$$

Теорема. Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ лінійно залежні, то принаймі один з них можна подати у вигляді лінійної комбінації інших (і навпаки).

Приклад 2.1. Показати, що вектори $\vec{a} = \{3; 4; -3\}$, $\vec{b} = \{-5; 5; 0\}$, $\vec{c} = \{2; 1; -4\}$ утворюють базис у тривимірному просторі. Знайти компоненти вектора $\vec{d} = \{8; -16; 17\}$ у цьому базисі.

Розв'язування. За визначенням три вектори тривимірного простору утворюють базис, якщо вони лінійно незалежні, тобто, якщо з рівності нулю їх лінійної комбінації

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0} \quad (2.6)$$

випливає $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Запишемо векторну рівність (2.6) у координатній формі:

$$\begin{cases} 3\lambda_1 - 5\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0; \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0; \\ -3\lambda_1 \quad -4\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему за формулами Крамера:

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Обчислюємо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 60 + 15 + 30 - 80 = 25 \neq 0.$$

Легко побачити, що $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, тому $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

З цього випливає, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні і тому утворюють базис. Будь-який четвертий вектор $\vec{d}$ тривимірного простору є їх лінійною комбінацією:

$$\vec{d} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c}, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \alpha_1 (3\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}) + \alpha_2 (-5\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k}) + \alpha_3 (2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}) = \\ &= (3\alpha_1 - 5\alpha_2 + 2\alpha_3)\vec{i} + \\ &\quad + (4\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3)\vec{j} + \\ &\quad + (-3\alpha_1 - 4\alpha_3)\vec{k} = 8\vec{i} - 16\vec{j} + 17\vec{k} \end{aligned}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – координати вектора $\vec{d}$ у базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Знайдемо їх. Рівність (2.7) в координатній формі має вигляд

$$\begin{cases} 3\alpha_1 - 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 8; \\ 4\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3 = -16; \\ -3\alpha_1 \quad -4\alpha_3 = 17. \end{cases}$$

Розв'язки цієї системи: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -3, \alpha_3 = -5$. Отже, $\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b} - 5\vec{c}$.

Лекція 3. Скалярний добуток векторів. Векторний та мішаний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів називається число (скаляр), яке дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Властивості скалярного добутку:

- Комутативна властивість множення:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$$

- Асоціативна властивість множення на число λ

$$(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$$

- Дистрибутивна властивість відносно додавання векторів:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$$

- Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.
- Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини

$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$$

Виразення скалярного добутку через координати.

Кут між векторами

Нехай задано два вектори $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ та $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Використовуючи властивості скалярного добутку, дістанемо

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ і $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ є рівність

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0.$$

Кут φ між векторами $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ і $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ визначається рівністю

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| |\bar{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

$$\text{Пр}_{\bar{b}} \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

Векторний добуток двох векторів

Трійкою векторів називаються три вектора, якщо вказано, який з них перший, який – другий, який третій.

Трійка некопланарних векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ називається правою, якщо складові її вектори, приведені до загального початку розташовані у порядку нумерації аналогічно тому, як розташовані великий, вказівний, середній пальці правої руки.

Векторним добутком вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який визначається трьома умовами:

1) довжина вектора $\bar{c}$ дорівнює

$$|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin \varphi, \text{ де } \varphi = \left(\hat{\bar{a}\bar{b}} \right);$$

2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$;

3) якщо $\bar{c} \neq 0$, то вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку векторів.

Векторний добуток позначається як:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}.$$

Властивості векторного добутку:

- Антиккомутативність множення:

$$\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$$

- Асоціативність відносно скалярного множника λ :

$$\lambda \bar{a} \times \bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b}); \quad \bar{a} \times \lambda \bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$$

- Дистрибутивність відносно додавання векторів:

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$$

- Векторний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори колінеарні

- Модуль $|\bar{a} \times \bar{b}|$ векторного добутку неколінеарних векторів дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, віднесених до спільного початку, тобто

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}|.$$

Векторний добуток двох векторів, заданих координатами

Нехай у прямокутній системі координат задано вектори $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ та $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Тоді векторний добуток вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ визначається за допомогою

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ називають скалярний добуток вектора $[\bar{a} \times \bar{b}]$ на вектор $\bar{c}$

$$a \cdot b \cdot c = [\bar{a} \times \bar{b}] \cdot \bar{c}.$$

Якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ задані координатами

$$\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad \bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}, \quad \bar{c} = \{x_3, y_3, z_3\},$$

$$[\bar{a} \times \bar{b}] \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Властивості мішаного добутку:

- Якщо в мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то мішаний добуток змінить знак, наприклад:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = -\bar{c} \cdot (\bar{b} \times \bar{a})$$

- При циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінюється:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b}$$

- У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна міняти місцями:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$$

- Модуль мішаного добутку $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, віднесених до спільного початку:

$$V = |\bar{a} \bar{b} \bar{c}|$$

- $V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} |\bar{a} \bar{b} \bar{c}|$
- Якщо мішаний добуток $\bar{a} \bar{b} \bar{c}$ додатний, то вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, утворюють праву трійку, а якщо від'ємний, то ліву
- Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Завдання для самоконтролю

1. Дати визначення векторного добутку.
2. Коли векторний добуток двох векторів дорівнює нулю?
3. Геометричний зміст векторного добутку.
4. Записати формулу для знаходження координат векторного добутку двох векторів.
5. Дати визначення мішаного добутку.
6. Записати формулу для обчислення мішаного добутку.
7. Як обчислити об'єм призми (піраміди), побудованої на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$?
8. Як перевірити компланарність трьох векторів?
9. Користуючись паралелограмом, побудованим на векторах $\bar{a}$ та $\bar{b}$, перевірити за допомогою креслення правильність тотожностей:

$$\text{а) } (\bar{a} + \bar{b}) + (\bar{a} - \bar{b}) = 2\bar{a}; \quad \text{б) } \bar{a} - \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2} = \frac{\bar{a} - \bar{b}}{2}.$$

10. Задані вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Знайти: 1) координати орта $\bar{b}$; 2) напрямні косинуси вектора $\bar{c}$; 3) розклад вектора $\bar{a} + 3\bar{b} - \bar{c}$ за базисом $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$; 4) довжину вектора $\bar{a} + \bar{c}$.

$$\text{а) } \bar{a} = (1; -3; 5), \quad \bar{b} = (0; -1; 2), \quad \bar{c} = (3; -4; 5);$$

$$\text{б) } \bar{a} = (0; -3; 6), \quad \bar{b} = (5; 5; -2), \quad \bar{c} = (4; 1; 1).$$

11. Вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ створюють кут $\pi/3$, $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$.

Знайти довжину вектора $\bar{c}$, якщо:

$$\text{а) } \bar{c} = 3\bar{a} + 2\bar{b}; \quad \text{б) } \bar{c} = 2\bar{a} - 3\bar{b}.$$

12. На векторах $\bar{a}$ та $\bar{b}$ побудовано паралелограм.

Визначити кут між діагоналями паралелограма.

$$\text{а) } \bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}, \quad \bar{b} = 3\bar{i} - \bar{k}; \quad \text{б) } \bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}, \quad \bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j}.$$

13. Визначити, при якому значенні p вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ будуть перпендикулярні:

$$\text{а) } \bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + p\bar{k}, \quad \bar{b} = p\bar{i} + 4\bar{j} + 5\bar{k};$$

$$\text{б) } \bar{a} = \bar{i} + p\bar{k}, \quad \bar{b} = p\bar{i} - \bar{j} + 5\bar{k}.$$

14. Точки A, B, C є вершинами трикутника. Обчислити площу трикутника:

$$\text{а) } A(1; 2; -1), \quad B(-1; 0; 3), \quad C(2; 1; -3);$$

$$\text{б) } A(-1; -2; 4), \quad B(-4; -2; 0), \quad C(3; -2; 1).$$

15. Спростити вираз та обчислити довжину вектора $\bar{a}$:

$$\text{а) } \bar{a} = (\bar{m} - 4\bar{n}) \times (3\bar{m} + \bar{n}), \quad |\bar{m}| = 1, \quad |\bar{n}| = 2, \quad \left(\bar{m}, \bar{n} \right) = \frac{\pi}{6};$$

$$\text{б) } \bar{a} = (\bar{m} + 4\bar{n}) \times (2\bar{m} - \bar{n}), \quad |\bar{m}| = 7, \quad |\bar{n}| = 2, \quad \left(\bar{m}, \bar{n} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

16. Визначити права чи ліва задана трійка векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ та обчислити об'єм піраміди, побудованої на цих векторах:

$$\text{а) } \bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}, \quad \bar{b} = -3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}, \quad \bar{c} = -\bar{i} + \bar{k};$$

$$\text{б) } \bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}, \quad \bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}, \quad \bar{c} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}.$$

РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Лекція 1. Координати точки на прямій і на площині.

Відстань між двома точками. Рівняння прямої на площині

Координатами точки називаються числа, взяті у певному порядку, які визначають положення точки на прямій, на площині, у просторі або на поверхні. Найчастіше використовують декартові координати.

Декартова прямокутна система координат на площині – це дві взаємно перпендикулярні координатні осі Ox і Oy з вибраною одиницею масштабу. Положення точки в системі Oxy задається парою чисел x, y .

Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ на площині Oxy :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (3.1)$$

Поділ відрізка в заданому відношенні. Нехай точка $M(x; y)$ лежить на відрізку M_1M_2 і ділить його у відношенні $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ (рис. 3.1). Тоді координати точки M визначаються через координати точок $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (3.2)$$

Координати середини відрізка M_1M_2 (при $\lambda = 1$):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (3.3)$$

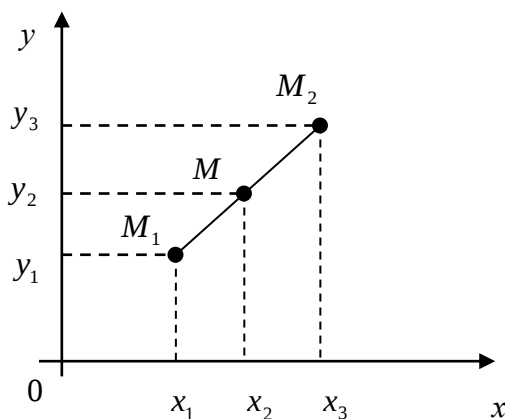


Рис. 3.1

Полярна система координат

Найважливішою після прямокутної системи координат є *полярна система координат*. Вона задається точкою O , яка називається *полюсом*, і променем Op , що виходить з полюса і називається *полярною віссю*. Задаються також одиниці масштабу: лінійна – для вимірювання довжин відрізків і кутова – для вимірювання кутів.

Розглянемо полярну систему координат і візьмемо на площині довільну точку M . Нехай $\rho = |\overline{OM}|$ – відстань від точки O до точки M і $\varphi = \angle(Op, \overline{OM})$ – кут, на який треба повернути полярну вісь *проти годинникової стрілки*, щоб сумістити її з вектором $\overline{OM}$ (рис. 3.2).

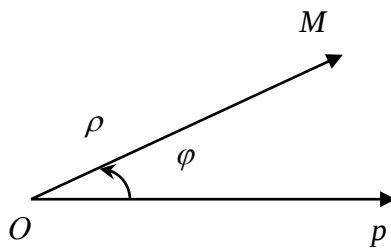


Рис. 3.2

Полярними координатами точки M називаються числа ρ і φ . При цьому число ρ вважається першою координатою і називається *полярним радіусом*, а число φ – другою координатою і називається *полярним кутом*. Точка M з полярними координатами позначається так: $M(\rho; \varphi)$. Очевидно, полярний радіус може набувати довільних невід’ємних значень: $0 \leq \rho < \infty$ полярний кут вважається таким, що змінюється в межах $0 \leq \varphi < \infty$.

Виразимо декартові координати точки M через полярні. Вважатимемо, що початок прямокутної системи збігається з полюсом, а вісь Ox – з полярною віссю Op . Якщо точка M має декартові координати x і y та полярні ρ і φ , то

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (3.4)$$

звідки

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (3.5)$$

Зауважимо, що друга з формул (3.5) дає два значення кута φ , оскільки він змінюється від 0 до 2π . З цих двох значень кута треба взяти те, для якого задовольняються формули (3.4). Формули (3.4) називають *формулами переходу від полярних координат до декартових*, а формули (3.5) – *формулами переходу від декартових координат до полярних*.

Різні види рівнянь прямої на площині

Нехай пряма на площині проходить через задану $M_0(x_0, y_0)$ паралельно заданому ненульовому вектору $\vec{s} = \{m; n\}$, який називається *напрямним вектором прямої*. Тоді канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \quad (3.6)$$

де x, y – координати довільної точки прямої.

З (3.6) легко дістати *параметричне рівняння прямої*:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}, \quad (3.7)$$

де t – параметр, який може набувати довільних дійсних значень.

Рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k :

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (3.8)$$

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (3.9)$$

Рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b, \quad (3.10)$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$, де α – кут, який утворює пряма з додатнім напрямом осі Ox ; b – відрізок, що відтинається прямою на осі Oy (рис. 3.3).

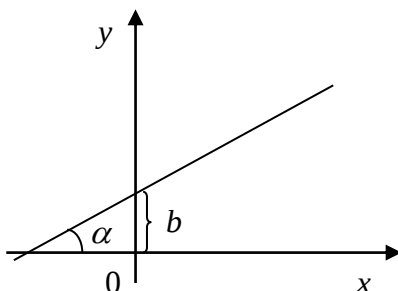


Рис. 3.3

Загальне рівняння прямої на площині:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0, \quad (3.11)$$

де A, B – координати вектора $\vec{n} = \{A; B\}$, перпендикулярного (нормального) до даної прямої.

Рівняння прямої у відрізках на осях координат:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (3.12)$$

де точки $M(a;0)$ $N(0;b)$ – відповідно точки перетину прямої з осями координат.

Нормальне рівняння має вигляд:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad (3.13)$$

де x, y – координати довільної точки M даної прямої, p – довжина перпендикуляра (нормалі), проведеного з початку координат на пряму; α – кут нахилу цього перпендикуляра до осі Ox .

Щоб звести загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ до нормального вигляду, треба всі його члени помножити на множник $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, який береться зі знаком, протилежним знаку вільного члена C .

Лекція 2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Відстань від точки до прямої

Кут між двома прямими. Нехай дві прямі задані рівняннями:

$$l_1: y = k_1x + b_1,$$

$$l_2: y = k_2x + b_2.$$

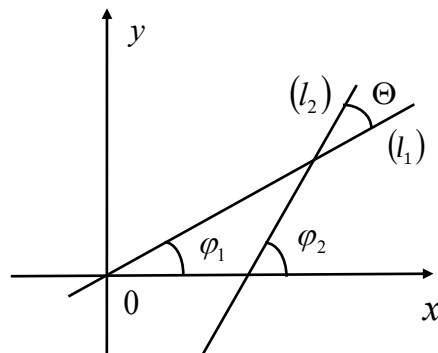


Рис. 3.4

Позначимо через φ_1 кут нахилу прямої l_1 до осі Ox і через Θ кут, на який потрібно повернути пряму l_1 до збігу з прямою l_2 (рис.3.4). Тоді кут $\varphi_2 = \varphi_1 + \Theta$ буде кутом нахилу прямої l_2 до осі Ox . Звідси

$$\Theta = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Якщо прямі l_1 і l_2 не перпендикулярні, то

$$\operatorname{tg} \Theta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1}.$$

Ураховуючи, що $\operatorname{tg} \varphi_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = k_2$, маємо:

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}. \quad (3.14)$$

Рівняння (3.14) дозволяє обчислити кут між прямими l_1 і l_2 .

Якщо дві прямі задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} \quad \text{і} \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2},$$

то кут між ними визначається як кут між їх напрямними векторами $\vec{s}_1 = \{m_1; n_1\}$ і $\vec{s}_2 = \{m_2; n_2\}$:

$$\cos\Theta = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \quad (3.15)$$

Якщо дві прямі задані своїми загальними рівняннями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

то кут між ними визначається, як кут між відповідними нормальними векторами $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$:

$$\cos\Theta = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (3.16)$$

Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Якщо прямі задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом, тоді з (3.14) встановлюємо умову паралельності прямих:

$$k_1 = k_2$$

і умову перпендикулярності:

$$k_1 k_2 = -1.$$

Якщо дві прямі задані канонічними рівняннями, тоді з (3.15) випливає, що пропорція

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

— це умова паралельності даних прямих, а рівність

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

— умова перпендикулярності цих самих прямих.

Якщо прямі задані загальними рівняннями, тоді з (3.16) випливає, що пропорція

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

— це умова паралельності даних прямих, а рівність

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

– умова перпендикулярності цих прямих.

Відстань від точки до прямої. Відстань d від заданої точки $A(x_0; y_0)$ до прямої знайдемо, якщо в ліву частину нормального рівняння прямої на місце поточних координат підставимо координати $(x_0; y_0)$ і отримане число візьмемо за абсолютним значенням:

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|.$$

Якщо пряма задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклад 3.1. Знайти кут між прямими $3x - 4y + 1 = 0$ і $5x - 12y + 3 = 0$.

Розв'язування. За формулою (3.16) маємо

$$\cos \varphi = \frac{3 \cdot 5 + (-4) \cdot (-12)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{15 + 48}{5 \cdot 13} = \frac{63}{65} \approx 0.96.$$

$$\varphi = \arccos 0.96.$$

Приклад 3.2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-8; 1)$ паралельно прямій $2x - y + 7 = 0$.

Розв'язування. Приведемо задане рівняння до вигляду: $y = 2x - 7$, отже, кутовий коефіцієнт прямої $k = 2$.

Оскільки шукана і задана прямі паралельні, то за умовою паралельності двох прямих їх кутові коефіцієнти рівні між собою, тому, скориставшись рівнянням (3.8), дістанемо $y - 1 = 2(x + 8)$ або $y - 2x - 17 = 0$.

Приклад 3.3. Знайти відстань від точки $N(-1; -1)$ до прямої $10x - 24y - 1 = 0$.

Розв'язування. Маємо

$$d = \frac{|10 \cdot (-1) - 24 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{10^2 + 24^2}} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}.$$

Лекція 3. Криві лінії другого порядку.

Коло

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

Рівняння кола радіуса R з центром в точці $C(a; b)$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (3.17)$$

Якщо у рівнянні (3.17) розкрити дужки, воно набуде вигляду

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0. \quad (3.18)$$

Щоб від рівняння (3.18) знову перейти до рівняння (3.17), треба в лівій частині рівняння (3.18) виділити повні квадрати:

$$\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p.$$

Еліпс

Еліпсом називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини, які називаються фокусами, є величина стала і більша від відстані між фокусами.

Нехай (рис. 3.5)

$$F_1M + F_2M = 2a \quad (a > 0).$$

Точки F_1 і F_2 називаються *фокусами* еліпса, а відстань F_1F_2 — *міжфокусною відстанню*; вона позначається через $2c$:

$$F_1F_2 = 2c.$$

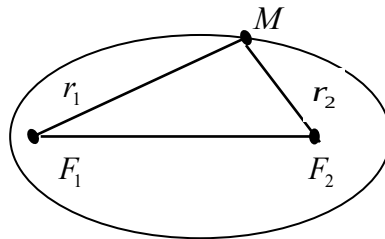


Рис. 3.5

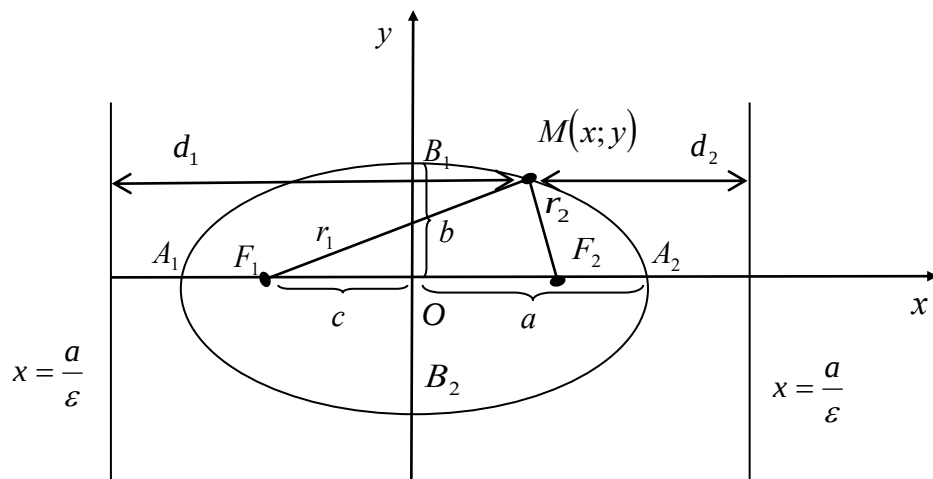


Рис. 3.6

Якщо взяти пряму F_1F_2 (рис. 3.6) за вісь абсцис і середину O відрізка F_1F_2 — за початок прямокутної декартової системи координат, то одержимо канонічне (найпростіше) рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.19)$$

Еліпс, заданий рівнянням (3.19), симетричний відносно осей координат.

Параметри a і b називаються *піввісями еліпса*. Якщо $a > b$, тоді відрізок A_1A_2 між точками перетину еліпса з віссю x – *велика вісь еліпса*, відрізок B_1B_2 між точками перетину еліпса з віссю y – *мала вісь еліпса*; в цьому разі фокуси F_1F_2 знаходяться на осі Ox на відстані

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

від центра.

Відношення $\frac{F_1F_2}{A_1A_2}$ міжфокусної відстані до великої осі, тобто величина

$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ називається *ексцентриситетом еліпса*.

Відстані від точки $M(x, y)$ еліпса до його фокусів (*фокальні радіуси-вектори*) визначаються за формулами

$$r_1 = a - \varepsilon x \quad r_2 = a + \varepsilon x.$$

Якщо в рівнянні (3.19) $a < b$, тоді фокуси еліпса знаходяться на осі Oy .

Отже, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Властивості еліпса, заданого канонічним рівнянням (3.19) ($a > b$):

- еліпс симетричний відносно осей координат і початку $O(0,0)$;
- координати фокусів $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$;
- еліпс – обмежена крива.

Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами еліпса.

Відношення *фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки від відповідних директрис є величина стала і дорівнює ексцентриситету еліпса*

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Приклад 3.4. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо задано точку $M_1(2, -\frac{5}{3})$ еліпса і його ексцентриситет $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

Розв'язування. Виходячи з умови, рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b).$$

Потрібно знайти значення параметрів a , b . Координати точки еліпса $M_1(2, -\frac{5}{3})$ задовольняють рівнянню еліпса, отже $\frac{4}{a^2} + \frac{25}{9b^2} = 1$.

Крім того, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{2}{3}$.

Розв'язавши систему, знаходимо: $a^2 = 9$, $b^2 = 5$. Отже, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Гіпербола

Гіперболою називається множина всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала і менша відстані між фокусами.

Позначимо через F_1 і F_2 фокуси гіперболи, відстань між ними – через $2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів – через $2a$. Точка $M(x, y)$ площини лежить на гіперболі тоді і лише тоді, коли

$$|F_1M - F_2M| = 2a, \quad (0 < 2a < F_1F_2).$$

Якщо M ближче до фокуса F_2 , ніж до фокуса F_1 , то точки M утворюють одну вітку гіперболи, для якої $F_1M - F_2M = 2a$ (рис. 3.7 права вітка). Ті точки, для яких $F_2M - F_1M = 2a$, утворюють другу вітку (рис. 3.7 ліва вітка). Середина відрізка F_1F_2 – точка O називається *центром* гіперболи.

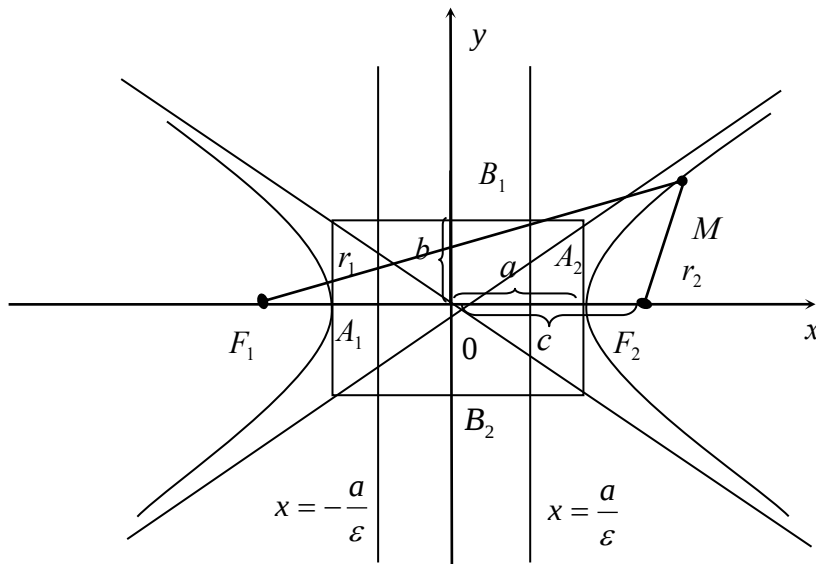


Рис. 3.7

Канонічне (найпростіше) рівняння гіперболи дістаємо у випадку, якщо приймаємо пряму F_1F_2 за вісь абсцис і середину O відрізка F_1F_2 – за початок координат. Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.20)$$

Гіпербола, задана рівнянням (3.20), симетрична відносно осей координат. Вона перетинає вісь Ox у точках $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ – *вершинах гіперболи*, і не перетинає ось Oy . Відрізок $A_1A_2 = 2a$ (а часто й пряма A_1A_2) називається *дійсною віссю* гіперболи. Гіпербола має також уявну вісь, яка проходить через її центр, але не перетинає її. На уявній осі прийнято

відкладати від центра відрізки $B_1O = OB_2 = b$. Параметр a називається *дійсною піввіссю*, b – *уявною піввіссю*. Параметр $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ є відстанню від фокуса до центра. Відношення $\frac{F_1F_2}{A_1A_2} = \frac{c}{a}$ міжфокусної відстані до дійсної осі називається *ексцентриситетом* гіперболи і позначається літерою ε :

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1.$$

Прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ називаються *асимптотами* гіперболи. Асимптотою деякої кривої називається пряма, відстань до якої від точки, що рухається по нескінченній кривій, прямує до нуля.

Відстань від точки $M(x, y)$ гіперболи до її фокусів (*фокальні радіуси-вектори*) визначаються за формулами :

$$r_1 = |\varepsilon x - a|; \quad r_2 = |\varepsilon x + a|.$$

Гіпербола, в якій $a = b$, називається *рівнобічною*, її рівняння: $x^2 - y^2 = a^2$, а рівняння асимптот: $y = \pm x$.

Дві гіперболи називаються *спряженими*, якщо вони мають спільний центр O і спільні осі, але дійсна вісь однієї з них є уявною віссю іншої.

Якщо $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ є рівнянням однієї із спряжених гіпербол, тоді інша подається рівнянням $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Спряжені гіперболи мають спільні асимптоти.

Властивості гіперболи, заданої канонічним рівнянням (3.20):

- гіпербола є симетричною відносно осей координат;
- координати фокусів: $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$;
- гіпербола – необмежена крива.

Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, де a – дійсна піввісь гіперболи, а ε – її ексцентриситет, називаються *директрисами гіперболи*. Директриси гіперболи мають ту саму властивість, що й директриси еліпса.

Приклад 3.5. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її фокуси лежать на осі Oy і відстань між ними дорівнює 20, а дійсна вісь гіперболи дорівнює 16.

Розв’язування. Шукане рівняння гіперболи матиме вигляд $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, де b – дійсна, а a – уявна піввісь гіперболи. За умовою $2c = 20$, звідки $c = 10$, $2b = 16, b = 8$.

Уявну вісь знайдемо із співвідношення $a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 100 - 64 = 36$.

Отже, рівняння гіперболи $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$.

Парабола

Параболою називається множина всіх точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки, що називається *фокусом*, і від даної прямої, яка називається *директрисою* і не проходить через фокус.

Відстань від фокуса до директриси p називається *параметром* параболі.

Канонічне рівняння параболі, симетричної відносно осі Ox (рис. 3.8): $y^2 = 2px$; канонічне рівняння параболі, симетричної відносно осі Oy (рис. 3.9): $x^2 = 2py$.

З рис. 3.8 видно, що парабола $y^2 = 2px$ має фокус $F(\frac{p}{2}; 0)$ і директрису $x = -\frac{p}{2}$; фокальний радіус-вектор точки M на ній $r = x + \frac{p}{2}$. Парабола $x^2 = 2py$ (рис. 3.9) має фокус $F(0; \frac{p}{2})$ і директрису $y = -\frac{p}{2}$; фокальний радіус-вектор точки M на ній $r = y + \frac{p}{2}$.

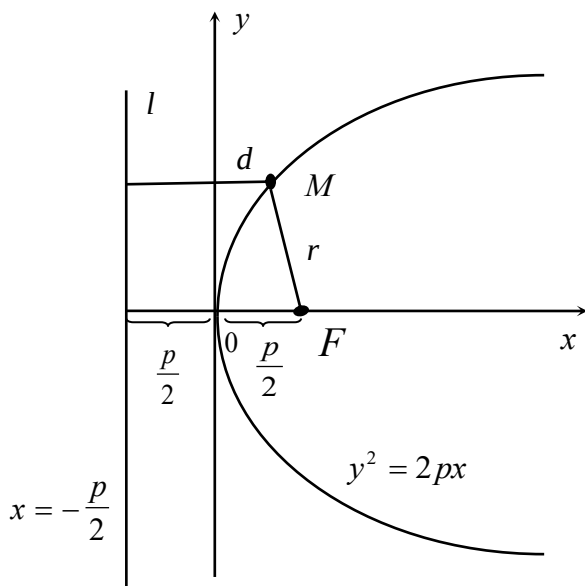


Рис. 3.8

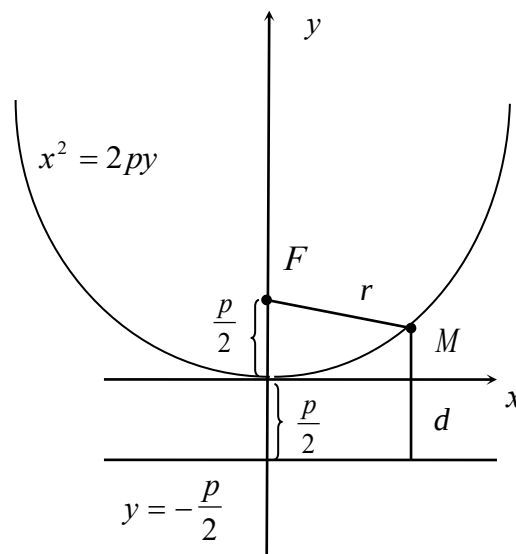


Рис. 3.9

Приклад 3.6. Скласти рівняння параболі, що має фокус $F = (0; -3)$ і проходить через початок координат, знаючи, що її віссю є вісь Oy .

Розв'язування. Оскільки фокус знаходиться у нижній півплощині, то й парабола, що міститься у нижній півплощині, симетрична відносно осі Oy .

Її рівняння $x^2 = -2py$. Фокус має координати $F(0; -\frac{p}{2})$. За умовою $-\frac{p}{2} = -3$

$\Rightarrow p = 6$. Отже, рівняння параболі $x^2 = -12y$.

Завдання для самоконтролю

1. Загальне рівняння прямої.
2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
3. Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0 (x_0, y_0)$, із заданим кутовим коефіцієнтом.
4. Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0 (x_0, y_0)$, із заданим нормальним вектором $\vec{n} = \{A, B\}$.
5. Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0 (x_0, y_0)$, із заданим напрямним вектором $\vec{s} = \{l, m\}$.
6. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1 (x_1, y_1)$ та $M_2 (x_2, y_2)$.
7. Кут між двома прямими.
8. Ознака паралельності двох прямих.
9. Ознака перпендикулярності двох прямих.
10. Рівняння прямої “у відрізках”.
11. Нормальне рівняння прямої.
12. Відстань від точки до прямої.
13. Що називається колом?
14. Записати рівняння кола з центром у точці (a, b) , з радіусом R . Зробити креслення.
15. Що називається еліпсом?
16. Записати канонічне рівняння еліпса. Зробити креслення.
17. Що називається ексцентриситетом еліпса?
18. Записати рівняння директриси еліпса. Чому дорівнює відстань між директрисами?
19. Що називається гіперболою?
20. Записати канонічне рівняння гіперболи. Зробити креслення.
21. Записати рівняння асимптот гіперболи.
22. Що називається ексцентриситетом гіперболи?
23. Записати рівняння директриси гіперболи.
24. Що називається параболою?
25. Записати канонічні рівняння парабол. Зробити креслення.
26. Який геометричний зміст параметра p ?
27. Задані координати трьох точок $A (x_1, y_1)$, $B (x_2, y_2)$, $C (x_3, y_3)$.
Скласти: 1) рівняння прямої, яка проходить через точку $A (x_1, y_1)$ паралельно вектору $\overline{BC}$; 2) рівняння прямої, яка проходить через точку $B (x_2, y_2)$ перпендикулярно вектору $\overline{AC}$; 3) рівняння прямої, яка проходить через точки $A (x_1, y_1)$ та $B (x_2, y_2)$.
а) $A (1; 2)$, $B (-3; 4)$, $C (0; -7)$; б) $A (0; 1)$, $B (2; 4)$, $C (-5; 1)$.
28. Визначити кут між двома прямими:
а) $5x - y + 2 = 0$
 $2x + 3y - 1 = 0$; б) $2x + 6y - 1 = 0$
 $3x + y + 7 = 0$.
29. Визначити, які з поданих пар прямих паралельні, які перпендикулярні:

- а) $3x - y + 5 = 0$ та $x + 3y - 1 = 0$; б) $y + 3 = 0$ та $5y - 7 = 0$.
30. Обчислити площу трикутника, який відсікає пряма $Ax + By + C = 0$ від координатного кута:
а) $2x - 6y + 12 = 0$; б) $8x - 3y + 24 = 0$.
31. Обчислити відстань від точки $P(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$.
а) $P(2; -5)$ $x - 2y - 7 = 0$; б) $P(-2; 3)$ $3x - 4y - 2 = 0$.
32. Які з наведених рівнянь визначають кола?
Знайти центр C та радіус R кола, побудувати його.
а) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$; б) $x^2 + y^2 + x = 0$.
33. Задано еліпс. Знайти: 1) його півосі; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння директрис; 5) побудувати його.
а) $4x^2 + 9y^2 = 25$; б) $x^2 + 15y^2 = 15$.
34. Задано гіперболу. Знайти: 1) півосі a та b ; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5) рівняння директрис; 6) побудувати гіперболу.
а) $9x^2 - 64y^2 = 1$; б) $4x^2 - 9y^2 = 36$.

РОЗДІЛ 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРИ

Лекція 1. Рівняння прямої та площини в просторі

Будь-яке рівняння першого степеня з трьома змінними визначає площину і навпаки, будь-яка площина визначається рівнянням першого степеня відносно довільних координат.

Рівняння площини, яка проходить через дану точку.

а) Нехай дана точка M_1 , що задана радіусом-вектором $\vec{r}\{x_1, y_1, z_1\}$. Рівняння площини, яка проходить через дану точку, у векторній формі має вигляд:

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_1) = 0,$$

де $\vec{r}\{x_1, y_1, z_1\}$ – радіус-вектор будь-якої точки площини; $\vec{n}\{A, B, C\}$ – нормальний вектор (рис. 4.1).

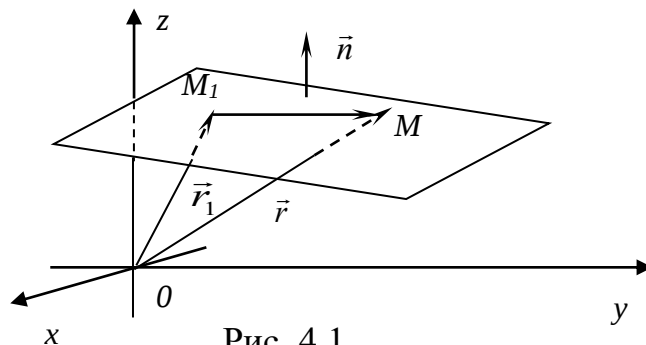


Рис. 4.1

б) Рівняння площини, яка проходить через дану точку $M(x_1, y_1, z_1)$ і має нормальний вектор $\vec{n}\{A, B, C\}$, у координатній формі має вигляд:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Загальне рівняння площини. Загальне рівняння площини має вигляд:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (4.1)$$

Окремі випадки рівняння (4.1).

1. Нехай у рівнянні (4.1) вільний член $D = 0$, тоді одержимо рівняння

$$Ax + By + Cz = 0$$

площини, яка проходить через початок координат.

2. Нехай у рівнянні (4.1) один із коефіцієнтів A , B і C дорівнює нулю. Тоді отримаємо рівняння площин, паралельних відповідно координатним осям:

- рівняння площини, паралельної осі Ox :

$$By + Cz + D = 0; \quad (4.2)$$

- рівняння площини, паралельної осі Oy :

$$Ax + Cz + D = 0; \quad (4.3)$$

- рівняння площини, паралельної осі Oz :

$$Ax + By + D = 0. \quad (4.4)$$

3. Нехай у рівняннях (4.2), (4.3) і (4.4) вільний член $D = 0$. Тоді одержимо рівняння площини, яка проходить через відповідні осі координат:

- рівняння площини, яка проходить через вісь Ox :

$$By + Cz = 0;$$

- рівняння площини, яка проходить через вісь Oy :

$$Ax + Cz = 0;$$

- рівняння площини, яка проходить через вісь Oz :

$$Ax + By = 0.$$

4. Нехай у рівнянні (4.1) два коефіцієнти $A=B=0$ або $A=C=0$, або $C=B=0$. Тоді отримаємо рівняння площин, паралельних відповідним координатним площинам:

- рівняння площини, яка паралельна координатній площині yOz :

$$Ax + D = 0, \quad \text{або} \quad x = a;$$

- рівняння площини, яка паралельна координатній площині xOz :

$$By + D = 0, \quad \text{або} \quad y = b;$$

- рівняння площини, яка паралельна координатній площині xOy :

$$Cz + D = 0, \quad \text{або} \quad z = a.$$

5. Нехай у рівнянні (4.1) три коефіцієнти B, C і D або A, C і D , або A, B і D дорівнюють нулю. Тоді отримаємо рівняння координатних площин:

- рівняння площин yOz :

$$Ax = 0, \quad \text{або} \quad x = 0;$$

- рівняння площини xOz :

$$By = 0, \quad \text{або} \quad y = 0;$$

- рівняння площини xOy :

$$Cz = 0, \quad \text{або} \quad z = 0.$$

Загальне рівняння площини у векторній формі має вигляд:

$$\vec{n} \vec{r} + D = 0,$$

де $\vec{n} \{A, B, C\}$ – вектор, перпендикулярний до даної площини; $\vec{r} \{x, y, z\}$ – біжучий радіус-вектор.

Рівняння площини у відрізках на осях координат має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

де за параметри, які визначають площину, обрані відрізки a, b і c , що відтинаються цією площиною на осях координат.

Нормальне рівняння площини.

1. Нехай у просторі задана декартова система координат $Oxyz$ з початком у точці O і площина α (рис. 4.2). Проведемо з точки O до площини α вектор нормалі $\vec{n} = \overrightarrow{OP}$. Нехай $|\overrightarrow{OP}| = p$, а $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси цього вектора; тоді вектор

$$\vec{n}^0 = \frac{\overrightarrow{OP}}{p} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$$

– одиничний вектор нормалі.

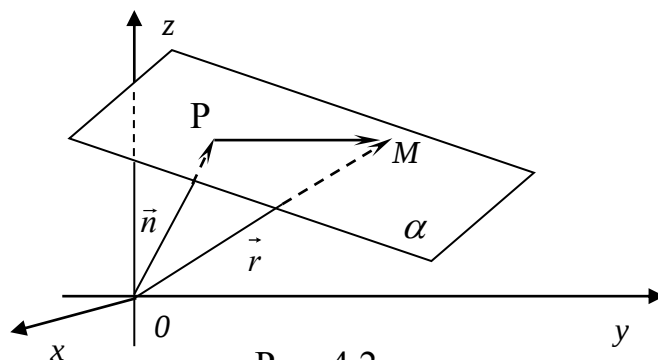


Рис. 4.2

Якщо $M(x, y, z)$ – довільна точка площини, то $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$ – радіус-вектор точки M . Очевидно, $\text{Pr}_{\vec{n}^0} \vec{r} = p$.

З іншого боку, $\text{Pr}_{\vec{n}^0} \vec{r} = \vec{n}^0 \vec{r}$.

Отже, $\vec{n}^0 \vec{r} = p$, або

$$\vec{n}^0 \vec{r} - p = 0, \quad (4.5)$$

або $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0$.

Рівняння (4.5) називається *нормальним рівнянням площини*.

Зведення загального рівняння площини до нормального вигляду. Для того, щоб загальне рівняння площини (4.1) було нормальним, воно має задовольняти дві умови:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1, \quad \text{і} \quad D < 0.$$

Якщо рівняння (4.1) не є нормальним, то його можна завжди звести до нормального вигляду (4.5). Для цього потрібно помножити рівняння (4.1) на нормувальний множник

$$\mu = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

вибравши знак перед коренем, протилежний знаку вільного члена D , рівняння (4.1).

Приклад 4.1. Звести рівняння площини $2x - 2y + z - 18 = 0$ до нормального вигляду.

Розв'язування. Знайдемо нормувальний множник:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{1}{3}.$$

Помноживши дане рівняння на $\frac{1}{3}$, дістанемо

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 6 = 0.$$

Кут між двома площинами. Кутом між двома площинами називається будь-який з двограних кутів, утворених цими площинами (рис. 4.3). (Нам досить визначити один з цих кутів, оскільки сума їх дорівнює π). Один з них дорівнює куту між нормальними векторами до цих площин $\bar{n}_1 \{A_1; B_1; C_1\}$, $\bar{n}_2 \{A_2; B_2; C_2\}$.

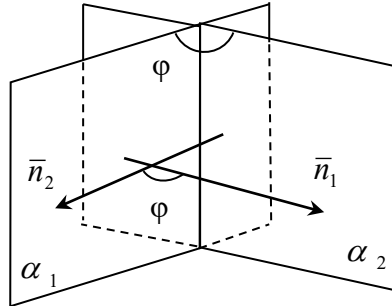


Рис. 4.3

Тому:

а) кут між площинами, які задані рівняннями у векторній формі

$$\bar{n}_1 \bar{r} + D_1 = 0, \quad \bar{n}_2 \bar{r} + D_2 = 0,$$

визначається за формулою

$$\cos \varphi = \frac{|\bar{n}_1 \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| |\bar{n}_2|};$$

б) кут між двома площинами, які задані рівняннями у координатній формі

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,$$

визначається за формулою

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Приклад 4.2. Знайти кут між площинами $3x - 4y - z - 1 = 0$ і $2x + 3y - 6z - 2 = 0$.

Розв'язування. Маємо

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{3 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 + (-1) \cdot (-6)}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{6 - 12 + 6}{\sqrt{26} \sqrt{49}} = 0.$$

Оскільки $\cos \varphi = 0$, то площини будуть перпендикулярними одна до одної $\varphi = 90^\circ$.

Умови паралельності і перпендикулярності двох площин. Умова паралельності двох площин:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

виражається рівностями

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Умова перпендикулярності двох площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Відстань від точки до площини. Відхиленням даної точки від даної площини називається число δ , яке дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з цієї точки на площину, взятого зі знаком плюс, якщо точка і початок лежать по різні боки від цієї площини, і зі знаком мінус, якщо вони лежать по один бік площини.

Відхилення δ одержується в результаті підстановки координат даної точки в нормальне рівняння (4.5) даної площини:

$$\delta = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p,$$

або у векторній формі

$$\delta = \vec{n} \cdot \vec{r}_1 - p.$$

Відстань d від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ дорівнює абсолютному значенню відхилення

$$d = |x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p|$$

або

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

У векторній формі відстань від точки до площини

$$d = |\vec{n} \cdot \vec{r}_1 - p|,$$

де $\vec{r}_1$ – радіус-вектор точки M_1 .

Рівняння площини, яка проходить через три дані точки. Рівняння площини, яка проходить через три дані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій, мають вигляд:

а) у векторній формі:

$$((\bar{r} - \bar{r}_1)(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)(\bar{r}_3 - \bar{r}_1)) = 0,$$

де $\bar{r}, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ – радіуси-вектори точок M, M_1, M_2, M_3 ($M(x, y, z)$ – довільна точка площини).

б) у координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пряма лінія у просторі

Загальні рівняння прямої. Пряма лінія в просторі визначається як лінія перетину двох площин (рис. 4.4).

У цьому випадку вона визначається системою двох рівнянь першого ступеня:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

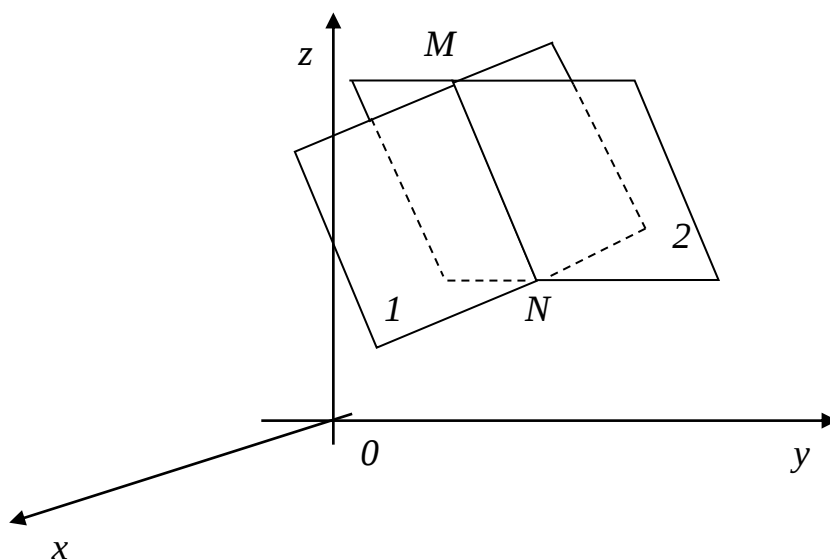


Рис. 4.4

Рівняння (4.6), які розглядаються сумісно, називаються загальними рівняннями прямої.

Канонічні рівняння прямої:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

де x_0, y_0, z_0 – координати точки M_0 , що лежить на прямій; x, y, z – координати довільної точки прямої; $\bar{S} = \{m, n, p\}$ – напрямний вектор прямої, паралельний даній прямій.

Параметричні рівняння прямої у просторі:

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0, \end{cases}$$

де x_0, y_0, z_0 – координати точки M_0 , що лежить на прямій; t – змінний параметр; $\bar{S} = \{m, n, p\}$ – напрямний вектор прямої.

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Векторне рівняння прямої лінії:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{s}t,$$

де $\bar{r} \{x, y, z\}$ і $\bar{r}_0 \{A, B, C\}$ – радіуси-вектори точок $M \{x, y, z\}$ і $M_0 \{A, B, C\}$ на прямій; $\bar{s} \{m, n, p\}$ – напрямний вектор прямої; t – змінний параметр (рис. 4.5).

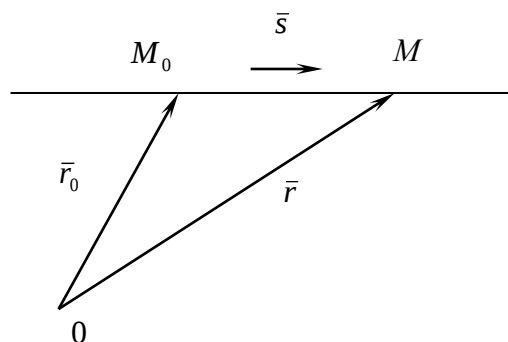


Рис. 4.5

Нехай пряма задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

тоді за її напрямний вектор $\bar{s}$ можна взяти векторний добуток $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ векторів $\bar{n}_1 \{A_1, B_1, C_1\}$ і $\bar{n}_2 \{A_2, B_2, C_2\}$, оскільки кожний з них перпендикулярний до цієї прямої і, отже, вектор $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ паралельний їй.

Таким чином, напрямний вектор прямої, заданої рівняннями (4.7), визначається рівністю

$$\bar{s} = [\bar{n}_1 \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Кут між двома прямими у просторі

$$\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1} \quad \text{і} \quad \frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{p_2} \quad (4.8)$$

визначається за формулою

$$\cos \varphi = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (4.9)$$

У формулі (4.9) можна взяти будь-який знак, що відповідає вибору одного з двох суміжних кутів між даними прямими.

Умова паралельності двох прямих, заданих канонічними рівняннями, має вигляд

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Приклад 4.3. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $M_1(1; -2; 1)$ і $M_2(3; 1; -1)$.

Розв'язування. Рівняння прямої, що проходить через дані точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Отже, маємо $\frac{x-1}{3-1} = \frac{y+2}{1+2} = \frac{z-1}{-1-1}$, або $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$.

Пряма і площина

Кут між прямою і площиною.

Кут між прямою

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \quad (4.10)$$

і площиною

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (4.11)$$

визначається за формулою

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Умова паралельності прямої (4.10) і площини (4.11):

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Умова перпендикулярності прямої (4.10) і площини (4.11):

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Якщо дано дві площини $A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D = 0$, то рівняння будь-якої площини, що проходить через лінію перетину, має вигляд:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (4.12)$$

де λ – змінний параметр. Рівняння (4.12) називається рівнянням *жмутка площин*.

Умова розташування двох прямих в одній площині. Умовою, за якою дві прямі

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{і} \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

лежать в одній площині, є рівність

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.13)$$

Якщо умова (4.13) виконується, то прямі лежать в одній площині, тобто вони або паралельні, якщо напрямні коефіцієнти пропорційні, або перетинаються, якщо напрямні коефіцієнти непропорційні. Якщо ж умова (4.14) не виконується, то прямі є мимобіжними.

Площина, що проходить через дану пряму. Умовою, за якою пряма

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

лежить у площині $Ax+By+Cz+D=0$, є система рівнянь:

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

Приклад 4.4. Скласти рівняння площини, що проходить через дану точку $M_1(1; 2; -3)$ паралельно до прямих

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-7}{3}, \quad \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}.$$

Розв'язування. Використаємо рівняння площини, що проходить через дану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

у якому A, B, C – координати нормального вектора до площини. Задача зводиться до знаходження цього нормального вектора.

Очевидно, в ролі нормального вектора можна взяти вектор, що є векторним добутком напрямних векторів даних прямих, або колінеарних до нього.

Отже, знайдемо $\bar{s}_1 = \{2; -3; 3\}$, $\bar{s}_2 = \{3; 2; -1\}$.

$$\bar{s}_1 \times \bar{s}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \bar{k} = 9\bar{i} + 11\bar{j} + 5\bar{k}.$$

Покладемо $\bar{n} = \{A; B; C\} = \{9; 11; 5\}$. Тоді з рівняння

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

маємо:

$$9(x-1) + 11(y-2) + 5(z+3) = 0 \Rightarrow 9x + 11y + 5z - 16 = 0.$$

Завдання для самоконтролю

1. Задані: точка $M(2; -1; 1)$, площина $P: 2x - 4y - 4z + 13 = 0$, пряма

$$l: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

а) Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку M і перпендикулярна до площини P .

б) Обчислити відстань від точки M до площини P .

в) Скласти рівняння площини, що проходить через точку M паралельно площині P .

г) Скласти параметричне рівняння прямої, що проходить через точку М паралельно до прямої l .

д) Скласти рівняння площини, що проходить через точку М перпендикулярно до прямої l .

е) Побудувати площину Р і обчислити об'єм піраміди, що відтинається нею від координатного кута.

2. Знайти: 1) кут між прямою l і площиною Р.

а) $l: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}; \quad P: 3x + 4y + 7z - 16 = 0.$

б) $l: \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1}; \quad P: 2x - 5y + 4z + 24 = 0.$