

Міністерство освіти і науки України
ВСП « Ковельський промислово-економічний фаховий коледж
Луцького національного технічного університету»



ВИЩА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКІЙ

для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий
молодший бакалавр спеціальності 071 Облік і оподаткування

Ковель 2024

УДК 51(07)

Затверджено до видання методичною радою ВСП «КПЕФК ЛНТУ»
протокол № _____ від « ____ » _____ 4року
Голова методичної ради ВСП «КПЕФК ЛНТУ» _____ Ігор ІЛЮШИК

Розглянуто і схвалено на засіданні циклової комісії з природничо-математичних освітніх компонентів ВСП «Ковельський промислово-економічний фаховий коледж ЛНТУ»,

протокол № ____ від « ____ » _____ 2024 року.

Голова циклової комісії _____ Жанна КРИВОШ

Електронна копія друкованого видання передана до книжкового фонду бібліотеки ВСП «КПЕФК ЛНТУ»

Завідувачка бібліотеки _____ Неля ТЕЛЮЧИК

Укладач: _____ Жанна КРИВОШ, викладач ВСП «КПЕФК ЛНТУ»

Рецензент: _____ Тетяна СЕЛІВОНЧИК, к.ф.н., викладач
ВСП «КПЕФК ЛНТУ»

Відповідальний за випуск: _____ Леся ПРОКОПЧУК, методист
ВСП «КПЕФК ЛНТУ»

Вища математика [Текст]: Конспект лекцій для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр спеціальності 071 Облік і оподаткування /уклад. Жанна Кривош. – Ковель: ВСП «КПЕФК ЛНТУ», 2024. – 40 с.

© Ж. Кривош, 2025

ЛЕКЦІЯ 1. Матриці і операції над ними. Визначники матриць. Властивості визначників. Обернена матриця.

1. Матриці та операції над ними.
2. Визначники. Обчислення визначників.
3. Обернена матриця.

Література:

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: навчальний посібник. – К.: центр учбової літератури, 2022, 448 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2017., 648 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. – К.: А.С.К., 2017., 480 с.

1. Матрицею розміру $m \times n$ називається сукупність елементів a_{ij} , розміщених у вигляді прямокутної таблиці, що має m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Перший індекс кожного елемента вказує на номер рядка, в якому цей елемент розміщений, другий – на номер стовпця. Матриці позначають прописними буквами латинського алфавіту: $A, B, C, \dots$. Уживають також більш компактний запис $A = (a_{ij})_{mn}$.

Матриця називається числовою, якщо її елементи a_{ij} – числа; функціональною, якщо a_{ij} – функції. Ми будемо розглядати, в основному, числові матриці.

Кажуть, що матриці A і B мають однакові розміри, якщо у них однакова кількість рядків і однакова кількість стовпців. Матриці A і B вважаються рівними між собою, якщо вони мають однакові розміри, а їхні елементи, що знаходяться на однакових місцях, рівні між собою.

Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців (тобто $m = n$), називається **квадратною** матрицею порядку n . Квадратна матриця порядку n має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ утворюють головну діагональ матриці, а елементи $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ – побічну.

Деякі квадратні матриці мають власні назви. Зокрема, до них відносяться нульова, діагональна та одинична матриці.

Нульовою називається матриця, всі елементи якої – нулі.

Якщо всі елементи матриці, окрім розташованих на головній діагоналі, дорівнюють нулю, то в цьому випадку матриця називається **діагональною**.

Якщо всі елементи діагональної матриці дорівнюють одиниці, то вона називається **одиничною** матрицею. Одинична матриця має вигляд:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю, яку одержують із матриці A заміною її рядків відповідними стовпцями, називають **транспонованою** і позначають A^T . Транспонована матриця має вигляд:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Сумою (різницею) матриць A і B називається матриця C , елементи якої $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ($c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$), де a_{ij} і b_{ij} – відповідно елементи матриць A і B . При цьому пишуть $C = A + B$.

Додавати або віднімати можна тільки матриці однакових розмірів.

Добутком матриці A на число α називається матриця C такого ж розміру, елементи якої $c_{ij} = \alpha a_{ij}$, де a_{ij} – елементи матриці A , тобто при множенні матриці на число (числа на матрицю) треба всі елементи матриці помножити на це число. При цьому пишуть $C = \alpha A$.

Для довільних матриць A, B, C однакових розмірів і довільних чисел α та β справджуються рівності:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A; \\ (A + B) + C &= A + (B + C); \\ \alpha(A + B) &= \alpha A + \alpha B; \\ (\alpha + \beta)A &= \alpha A + \beta A; \\ (\alpha \beta)A &= \alpha(\beta A). \end{aligned}$$

Добутком матриці $A_{m \times n}$ на матрицю $B_{n \times p}$ називається матриця $C_{m \times p} = AB$,

елементи якої $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$, де a_{ik}, b_{kj} – елементи матриць A і B . Зауважимо, що

перемножувати можна тільки ті матриці, в яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. З існування добутку AB не означає, що існує добуток BA .

Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються **комутативними**.

2. Визначником другого порядку квадратної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається

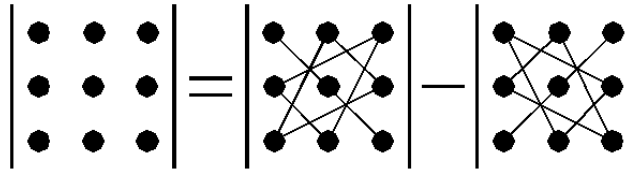
$$\text{число } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначником третього порядку квадратної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається

число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \dot{a}_{13} \\ \dot{a}_{21} & \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} \\ \dot{a}_{31} & \dot{a}_{32} & \dot{a}_{33} \end{vmatrix} = \dot{a}_{11}\dot{a}_{22}\dot{a}_{33} + \dot{a}_{12}\dot{a}_{23}\dot{a}_{31} + \dot{a}_{13}\dot{a}_{21}\dot{a}_{32} - \dot{a}_{13}\dot{a}_{22}\dot{a}_{31} - \dot{a}_{12}\dot{a}_{21}\dot{a}_{33} - \dot{a}_{11}\dot{a}_{23}\dot{a}_{32}.$$

Для обчислення визначників третього порядку існує правило трикутника, яке схематично можна зобразити та



Аналогічно для квадратної матриці A n -го порядку можна розглянути її визначник n -го порядку. Визначник матриці A часто позначають $\det A$.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник, який дістають з визначника матриці A викреслюванням i -го рядка та j -го стовпця.

Алгебричним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається відповідний мінор, взятий зі знаком «плюс», якщо сума його індексів парна, і зі знаком «мінус», якщо сума його індексів непарна $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Визначник вищого порядку можна обчислити за допомогою визначників нижчого порядку **розкладом за елементами якогось рядка або стовпця**. Зокрема, для визначників третього порядку маємо:

$$\begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \dot{a}_{13} \\ \dot{a}_{21} & \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} \\ \dot{a}_{31} & \dot{a}_{32} & \dot{a}_{33} \end{vmatrix} = \dot{a}_{11} \begin{vmatrix} \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} \\ \dot{a}_{32} & \dot{a}_{33} \end{vmatrix} - \dot{a}_{12} \begin{vmatrix} \dot{a}_{21} & \dot{a}_{23} \\ \dot{a}_{31} & \dot{a}_{33} \end{vmatrix} + \dot{a}_{13} \begin{vmatrix} \dot{a}_{21} & \dot{a}_{22} \\ \dot{a}_{31} & \dot{a}_{32} \end{vmatrix}.$$

Визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їх алгебричні доповнення.

Основні властивості визначників.

1. Значення визначника не змінюється, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями, а стовпці – рядками.
2. Перестановка двох рядків (стовпців) визначника рівносильна множенню його на -1 .
3. Якщо визначник має два однакових рядка (стовпця), то він дорівнює нулю.
4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника.
5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.
6. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
7. Якщо кожний елемент деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких один у згаданому рядку (стовпці) має перші з заданих доданків, а інший – другі; елементи, що знаходяться на решті місць, у всіх трьох визначниках одні й ті самі. Записується ця властивість таким чином:

$$\begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \dot{a}_{13} \\ \dot{a}_{21} + b_{21} & \dot{a}_{22} + b_{22} & \dot{a}_{23} + b_{23} \\ \dot{a}_{31} & \dot{a}_{32} & \dot{a}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \dot{a}_{13} \\ \dot{a}_{21} & \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} \\ \dot{a}_{31} & \dot{a}_{32} & \dot{a}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \dot{a}_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \dot{a}_{31} & \dot{a}_{32} & \dot{a}_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів деякого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на довільний спільний множник, то значення визначника при цьому не зміниться.

3. Матриця A^{-1} називається **оберненою** до квадратної матриці A , якщо добуток цих матриць дорівнює одиничній матриці, тобто $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Обернена матриця існує для всякої квадратної матриці A , яка є **невиродженою**, тобто коли визначник матриці $\det A \neq 0$.

Алгоритм знаходження оберненої матриці:

1. Обчислити визначник матриці A . Якщо $\det A \neq 0$, то матриця A має обернену, в іншому випадку оберненої матриці не існує.
2. Обчислити алгебричні доповнення A_{ij} елементів матриці A .
3. Визначити обернену матрицю за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Зразки розв'язування задач.

1. Знайти матрицю $C=2A-3B$, якщо $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ і $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Користуючись означеннями операцій множення матриці на число та додавання матриць, послідовно знаходимо:

$$2\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 & 4 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 & 0 \cdot 2 & -1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad 3\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 & 2 \cdot 3 & 5 \cdot 3 \\ 3 \cdot 3 & -7 \cdot 3 & 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 9 & -21 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \tilde{N} = 2\hat{A} - 3\hat{A} &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 & 15 \\ 9 & -21 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 & 6-6 & 8-15 \\ 4-9 & 0-(-21) & -2-12 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ -5 & 21 & -14 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Для матриць $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ і $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ обчислити $A^T + B^T$.

Розв'язання:

$$\hat{A}^0 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}^0 + \hat{A}^0 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Для заданих матриць обчислити AB і BA , якщо це можливо:

$$\text{а) } \hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

а) Оскільки задано матриці $A_{2 \times 2}$ і $B_{2 \times 2}$, то можна визначити добутки AB та BA . Отже,

$$\hat{A}\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) & 3 \cdot (-5) + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\hat{A}\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-5) \cdot 1 & 1 \cdot 5 + (-5) \cdot 2 \\ -1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$AB=BA$.

б) Оскільки кількість стовпців матриці A не дорівнює кількості рядків матриці B то добутку AB не існує. Проте можна обчислити добуток BA .

$$\hat{A}\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-2) & -3 + 4 \\ 3 + (-4) & -9 + 8 \\ 5 + (-6) & -15 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Обчислити визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

а) Використовуючи формулу для обчислення визначника другого порядку, маємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-6) \cdot 3 = 2 + 18 = 20$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha.$$

в) Користуючись правилом трикутника, знаходимо

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) \cdot 5 - 2 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= 30 - 2 - 12 - 9 - 10 - 8 = -11.$$

5. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами першого рядка.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 2 \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 - 24 - 2(-6 - 18) +$$

$$+ 5(-8 - 3) = -21 + 48 - 55 = -28.$$

6. Обчислити визначник, спочатку спростивши його: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

Додамо перший рядок до третього рядка, потім помножимо перший рядок на -2 і додамо його до другого рядка і отримаємо визначник, в якому елементи $a_{21} = a_{31} = 0$. Отриманий визначник розкладемо за елементами першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 + (-2) \cdot 1 & 8 + (-2) \cdot 3 & 1 + (-2) \cdot 2 \\ -1 + 1 & 1 + 3 & 2 + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 - (-12) = 20.$$

7. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ і перевірити, чи справджуються рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Розв'язання:

Знайдемо визначник матриці: $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$. Оскільки $\Delta = -5 \neq 0$,

обернена матриця A^{-1} існує. Знаходимо алгебричні доповнення: $A_{11} = 3$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$. Тоді обернена матриця буде мати вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи виконуються рівності $AA^{-1} = A^{-1}A = E$:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} + \frac{3}{5} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

ЛЕКЦІЯ 2. Системи лінійних рівнянь. Формули Крамера. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом

Література:

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: навчальний посібник. – К.: центр учбової літератури, 2022, 448 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2017., 648 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. – К.: А.С.К., 2017., 480 с.

Системою m лінійних рівнянь з n змінними $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається система, яка

має наступний вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де a_{ij} – коефіцієнти при змінних; b_i – вільні члени, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Упорядкована сукупність чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, називається **розв'язком** системи, якщо при заміні x_1 на a_1 , x_2 на a_2 , ..., x_n на a_n у кожному рівнянні системи дістанемо n правильних числових рівностей.

Система, що має розв'язок, називається **сумісною**. Система, яка не має жодного розв'язку, називається **несумісною**. Система з єдиним розв'язком називається **визначеною**, а з більшим числом розв'язків – **невизначаною**.

Система двох лінійних рівнянь з двома змінними має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

а систему трьох лінійних рівнянь з трьома змінними записують у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (2.2)$$

Метод Крамера. Цей метод розв'язування систем лінійних рівнянь зводиться до обчислення визначників. Так, розв'язок системи (2.1) можна знайти за **формулами Крамера**:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}, \text{ за умови, що } \Delta \neq 0.$$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - називається визначником системи (2.1), а $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ - визначники, які

дістають з визначника Δ заміною першого, другого стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Формули Крамера для системи (2.2) мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ - визначник системи (2.2), а

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} - \text{визначники, які}$$

дістають з визначника Δ заміною першого, другого і третього стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Системи (2.1) і (2.2) мають:

а) єдиний розв'язок, коли $\Delta \neq 0$;

б) безліч розв'язків, коли $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$ ($\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$);

в) не мати жодного розв'язку, коли $\Delta = 0$ і хоча б один із визначників $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ ($\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$) відмінний від нуля.

Матричний метод розв'язання лінійних систем.

$$\text{Нехай дано систему: } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Розглянемо три матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Перша матриця називається матрицею системи, друга матрицею-стовпцем змінних, третя – матрицею-стовпцем вільних членів. Тоді систему можна записати у матричному вигляді: $A \cdot X = B$. Якщо матриця системи рівнянь не вироджена ($\Delta \neq 0$), то розв'язок

системи знаходимо у вигляді $X = A^{-1}B$, або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \text{Зразки розв'язування задач.}$$

1. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 - x_2 = 3. \end{cases} \quad б) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -12. \end{cases}$$

Розв'язання:

а) Знаходимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0, \text{ тому система має єдиний розв'язок.}$$

$$\text{Знаходимо } \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -8 - 6 = -14; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21.$$

За формулами Крамера, маємо:

$$x_1 = \frac{-14}{-7} = 2, \quad x_2 = \frac{-21}{-7} = 3.$$

б) Знаходимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-5 - 1) - (25 + 1) - 5 + 1 =$$

$$= -18 - 26 - 4 = -48 \neq 0.$$

Система має єдиний розв'язок. Знаходимо Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} :

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & -1 \end{vmatrix} = -2(-5 - 1) - (50 - 12) -$$

$$-10 - 12 = 12 - 38 - 22 = -48;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -12 \end{vmatrix} = 3(50 - 12) + 2(25 + 1) -$$

$$-60 - 10 = 114 + 52 - 70 = 96;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 10 \\ -1 & -12 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -12 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(12 + 10) - (-60 - 10) -$$

$$-2(-5 + 1) = 66 + 70 + 8 = 144.$$

За формулами Крамера, маємо:

$$x_1 = \frac{-48}{-48} = 1; \quad x_2 = \frac{96}{-48} = -2; \quad x_3 = \frac{144}{-48} = -3.$$

2. Дослідити на сумісність системи лінійних рівнянь та знайти їх розв'язок у випадку сумісності:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$

Розв'язання:

а) Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -1 - 5 - 2(-2 - 4) - 10 + 4 =$$

$$= -6 + 12 - 6 = 0$$

Визначник системи дорівнює нулю. Система або має безліч розв'язків, або не має жодного розв'язку. Знаходимо Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} :

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6 - 6 + 12 = 0,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -9 + 18 - 9 = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 - 3 = 0.$$

Оскільки, $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$, то система сумісна і невизначена. Для знаходження всіх розв'язків, відкидаємо третє рівняння, а рівняння, що залишилися, запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + 4x_3, \\ 2x_1 + x_2 = -1 + 5x_3. \end{cases}$$

Розв'язуємо отриману систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 4x_3 & 2 \\ -1 + 5x_3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4x_3 - 2(-1 + 5x_3) = 3 - 6x_3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 4x_3 \\ 2 & -1 + 5x_3 \end{vmatrix} = -1 + 5x_3 - 2(1 + 4x_3) = -3 - 3x_3;$$

$$x_1 = \frac{3 - 6x_3}{-3} = -1 + 2x_3, \quad x_2 = \frac{-3 - 3x_3}{-3} = 1 + x_3.$$

$$\text{б) } \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{ тому що другий і третій рядки пропорційні.}$$

Система або має безліч розв'язків, або не має жодного розв'язку.

$$\Delta_{\delta_1} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -7 - 14 = -21 \neq 0.$$

Отже, задана система не має жодного розв'язку, тобто вона є несумісною.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 17, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання:

Запишемо дану систему рівнянь у матричній формі: $A \cdot X = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 3 - 90 - 24 + 18 - 10 = -87 \neq 0, \text{ значить матриця } A \text{ має обернену}$$

матрицю.

Знайдемо алгебричні доповнення елементів матриці A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -24, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -21,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 20, \quad A^{-1} = -\frac{1}{87} \begin{pmatrix} 3 & -24 & -21 \\ -7 & -2 & 20 \\ -19 & 7 & 17 \end{pmatrix}.$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -19, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17.$$

Скориставшись рівністю $X = A^{-1} \cdot B$, знаходимо розв'язок системи:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{87} \begin{pmatrix} 3 & -24 & -21 \\ -7 & -2 & 20 \\ -19 & 7 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{87} \begin{pmatrix} 3 \cdot 17 - 24 \cdot (-3) - 21 \cdot 10 \\ -7 \cdot 17 - 2 \cdot (-3) + 20 \cdot 10 \\ -19 \cdot 17 + 7 \cdot (-3) + 17 \cdot 10 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{87} \begin{pmatrix} -87 \\ 87 \\ -174 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2$ - шуканий розв'язок.

ЛЕКЦІЯ 3. Поняття задачі лінійного програмування та різні форми її завдання

Під задачею лінійного програмування в загальному вигляді розуміють задачу знаходження мінімуму (максимуму) лінійної функції від n змінних на множині розв'язків системи лінійних нерівностей або лінійних рівнянь. Розглянемо це на конкретному прикладі. Задача Завод додатково освоїв випуск продукції чотирьох асортиментів B_1, B_2, B_3, B_4 . Для випуску цієї продукції потрібна сировина чотирьох видів A_1, A_2, A_3, A_4 , яку завод може щомісячно виділяти в обмеженій кількості. Кількість сировини кожного виду, необхідної для виготовлення кожного виду продукції, ціна кожного виду продукції, а також лімітоване щомісячне надходження потрібної сировини подано в таблиці

Сировина	Щомісячне надходження сировини (ум.од.)	Витрати сировини на одиницю кожного виробу			
		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1260	2	4	6	8
A_2	900	2	2	0	6
A_3	530	0	1	1	2
A_4	210	1	0	1	0
Прибуток від реалізації одиниці виробу		8	10	12	18
Кількість продукції		x_1	x_2	x_3	x_4

Визначити, яку кількість треба випускати заводу кожного з видів продукції B_1, B_2, B_3, B_4 , щоб прибуток від її реалізації був максимальний.

Складемо математичну модель цієї задачі, тобто опишемо її в термінах математичної символіки. Позначимо через x_1, x_2, x_3, x_4 відповідно ті кількості продукції асортиментів B_1, B_2, B_3, B_4 , які треба випустити, щоб мати максимальний прибуток від їх реалізації. Тоді на випуск продукції B_1 буде витрачено $2x_1$ умовних одиниць сировини A_1 ; на випуск B_2 - $4x_2$, на випуск B_3 - $6x_3$, на випуск B_4 - $8x_4$ умовних одиниць сировини A_1 . Витрати сировини A_1 не повинні перевищувати 1260 умовних одиниць. Матимемо таку лінійну нерівність: $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 \leq 1260$.

За змістом задачі невідомі x_1, x_2, x_3, x_4 є невід'ємні величини, тобто $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$. Аналогічні міркування приводять до такої системи лінійних нерівностей, які

$$\text{накладають обмеження на значення змінних } x_1, x_2, x_3, x_4 : \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 \leq 1260, \\ 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 6x_4 \leq 900, \\ 0x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 530, \\ x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 \leq 210. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \\ x_4 \geq 0. \end{cases}$$

визначається так: $Z = 8x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 18x_4$.

Дані системи лінійних нерівностей і лінійна функція визначають математичну модель розглянутої задачі: *знайти такі значення змінних x_1, x_2, x_3, x_4 , які задовольняють систему отриманих лінійних нерівностей і перетворюють у максимум отриману лінійну функцію Z .*

Тепер розглянемо чисельне розв'язання таких задач.

У наведеній задачі значення змінних x_1, x_2, x_3, x_4 повинні задовольняти систему лінійних нерівностей лише виду $\leq$. Трапляються задачі, де значення змінних задовольняють систему нерівностей лише виду $\geq$, або систему лінійних рівнянь, або мішану систему рівнянь і нерівностей.

Якщо позначити символом $\vee$ будь-яке із трьох співвідношень : $\leq, =, \geq$, то математичну модель загальної задачі лінійного програмування можна подати в такому вигляді: *знайти такі числові значення змінних $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, які задовольняють систему лінійних обмежень:*

[illegible]

і перетворюють в екстремум (максимум або мінімум) лінійну функцію

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j.$$

Цю функцію називають *цільовою функцією*, вона моделює поставлену в задачі мету.

У задачах лінійного програмування можна виділити два типи однорідних обмежень на вибір змінних: у вигляді лінійних нерівностей або у вигляді лінійних рівнянь. Крім того, для спрощення можна формулювати задачу лише для мінімуму цільової функції. Якщо ж в конкретній задачі треба визначити максимум функції $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, то це те саме, що шукати мінімум функції $Z_1 = -Z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$.

З цього випливають три форми задач лінійного програмування:

- 1) загальна задача лінійного програмування;
- 2) стандартна (симетрична);
- 3) канонічна.

Загальна задача лінійного програмування подається у вигляді:

$$\max(\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

за умов:

[illegible]

Допустимий план $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *опорним планом* задачі лінійного програмування, якщо він задовольняє не менше, ніж m лінійно незалежних обмежень системи (3.2) у вигляді рівностей, а також обмеження щодо невід'ємності змінних.

Опорний план $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, називається **невиродженим**, якщо він містить точно m додатних змінних, інакше він **вироджений**.

$$\max(\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \text{ за умов:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{array} \right., \text{ аёо } \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{array} \right.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Задачу можна легко звести до *канонічної форми*, тобто до такого вигляду, коли в системі обмежень всі b_i ($i=1,2,\dots,m$) невід'ємні, а всі обмеження є рівностями.

Якщо якась b_i від'ємне, то, помноживши i -те обмеження на -1, дістанемо у правій частині відповідної рівності додатне значення. Коли i -те обмеження має вигляд нерівності

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

то останню завжди можна звести до рівності, увівши *додаткову змінну* x_{n+1} :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i.$$

Аналогічно обмеження виду

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \geq b_k$$

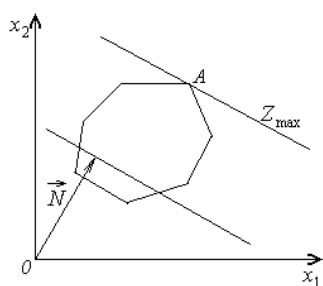
зводиться до рівності, віднімаючи від лівої частини *додаткову змінну* x_{n+2} :

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n - x_{n+2} = b_k,$$

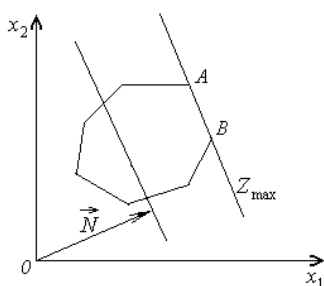
$$(x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0).$$

Така заміна нерівностей рівняннями за допомогою введення додаткових змінних не змінить розв'язку початкової задачі.

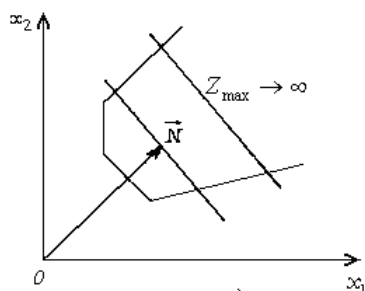
Задачі лінійного програмування можна розв'язувати графічно і аналітично.



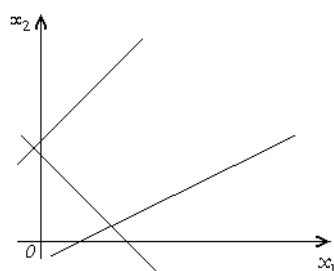
Мал. 1



Мал. 2

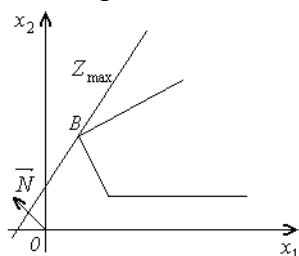


Мал. 3

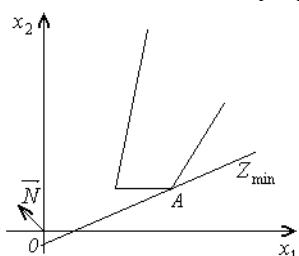


Мал. 4

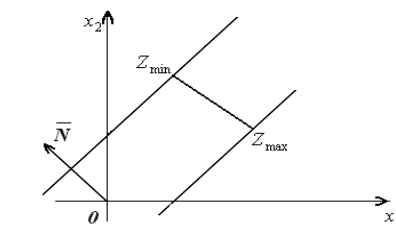
4. Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв'язків (мал. 5 та 6). На мал. 5 у точці B маємо максимум, на мал. 6 у точці A — мінімум, на мал. 7 зображено, як у разі необмеженої області допустимих планів цільова функція може набирати максимального чи мінімального значення у будь-якій точці променя.



Мал. 5



Мал. 6



Мал. 7.

Приклад. Розв'язати графічно задачу ЛП

$$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20; \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 30; \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 33; \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для побудови прямої лінії необхідно мати дві опорних точки. Будемо шукати ці точки на осях. При цьому отримаємо такі результати:

1-а лінія

$$2x_1 + 5x_2 = 20;$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 4;$$

$$x_1 = 10; \quad x_2 = 0;$$

2-а лінія

$$5x_1 + 3x_2 = 30;$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 10;$$

$$x_1 = 6; \quad x_2 = 0;$$

3-я лінія

$$5x_1 + 6x_2 = 33;$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 5.5;$$

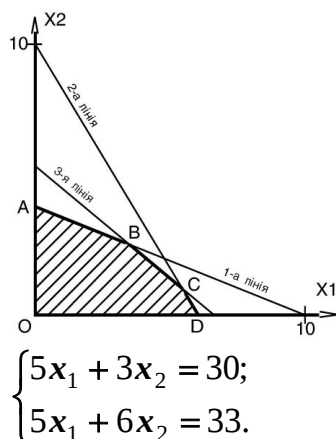
$$x_1 = 6.6; \quad x_2 = 0;$$

Знайдемо координати вершин області. Координати вершин **O**, **A**, **D** вже відомі і становлять: **O(0;0)**, **A(0;4)**, **D(6;0)**. Для знаходження координат вершини **B** необхідно розв'язати систему двох лінійних рівнянь, які відповідають першій і третій лінії:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 20; \\ 5x_1 + 6x_2 = 33. \end{cases}$$

В результаті отримаємо **B(3.46; 2.62)**.

Для знаходження координат вершини **C** необхідно розв'язати систему двох лінійних рівнянь, які відповідають другій і третій лінії:



В результаті отримаємо **C(5.40; 1.00)**.

Обчислимо значення цільової функції у вершинах симплекса, використовуючи формулу $F(x) = 2x_1 + x_2$. $F(O)=0.00$; $F(A)=4$; $F(B)=9.54$; $F(C)=11.8$; $F(D)=12.00$.

Отже оптимальний розв'язок відповідає вершині **D** симплекса і має вигляд:

$$x_1 = 6; \quad x_2 = 0. \quad F_{\max} = 12.00$$

Лекція 5. Диференціювання функції однієї змінної

1. Означення похідної. Основні формули диференціювання

Похідною функції $y=f(x)$ в точці x_0 називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = y'(x_0).$$

Геометричний зміст. Похідна функції $y=f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної проведеної до кривої $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0; f(x_0))$.

Рівняння цієї дотичної має вигляд $y(x)=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$

Механічний зміст похідної. $v=s'(t_0)$ – це швидкість матеріальної точки, яка рухається по прямій за законом $s=s(t)$, у момент часу t_0 .

Якщо функція має похідну, то вона називається диференційованою.

Неперервність є *необхідною умовою* для диференційованості функції, диференційованість – *достатня умова* для неперервності.

Правила обчислення похідних:

Позначимо $u(x_0)=u, v(x_0)=v, u'(x_0)=u', v'(x_0)=v', c=const$.

$$1) (cu)' = cu';$$

$$2) (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$3) (u \cdot v)' = u'v + v'u;$$

$$4) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v'(x_0) \neq 0)$$

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = x^3 e^x$

Розв'язання. $y' = (x^3 e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = 5\sqrt[3]{x} - 4^x + \frac{3}{x^2} - 7$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= (5x^{\frac{1}{3}} - 4^x + 3x^{-2} - 7)' = \frac{5}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - 4^x \ln x - 6x^{-2-1} = \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 4^x \ln x - 6x^{-3} \\ &= \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} - 4^x \ln x - \frac{6}{x^3} \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = \frac{\cos x}{x^2}$

Розв'язання. $y' = \left(\frac{\cos x}{x^2}\right)' = \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x}{x^4}$

Похідна складеної та оберненої функції

а) Якщо функція $u = u(x)$ має похідну u'_x в точці x , а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці u , то складена функція $y = f(u(x))$ в даній точці x має похідну y'_x , яка обчислюється за формулою $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

б) Якщо функція $y=f(x)$ строго монотонна і має в точці x_0 похідну $f'(x_0) \neq 0$, то і обернена функція $x=g(y)$ має похідну в точці $y_0=f(x_0)$ причому $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = (2x-3)^4 - 5e^{2x}$

Розв'язання. $y' = ((2x-3)^4 - 5e^{2x})' = 4(2x-3)^3 \cdot (2x-3)' - 5 \cdot 2e^{2x}$
 $= 8(2x-3)^3 - 10e^{2x}$

Похідні вищих порядків

Похідну $y' = f'(x)$ диференційованої функції $y=f(x)$ можна розглядати як деяку нову функцію. Можливо, що ця функція також має похідну, тоді похідна від похідної I-го порядку називається *похідною II-го порядку* або *II-ою* похідною і позначають $y'' = (f'(x))'$

Похідною n-го порядку називають першу похідну від похідної $(n-1)$ -го порядку і позначають

$$\left(y^{(n-1)} \right)' = y^{(n)}, \quad \left(f^{(n-1)}(x) \right)' = f^{(n)}(x)$$

Приклад 1. Знайти похідну $y^{(IV)}$ від функції $y = \cos^2 3x$.

Розв'язання. для знаходження похідної четвертого порядку необхідно знайти похідну третього порядку, похідна 3-го порядку знаходиться як похідна від похідної 2-го порядку, а похідна 2-го порядку знаходиться як похідна від похідної першого порядку

$$y' = 2 \cos 3x (-\sin 3x) \cdot 3 = -3 \sin 6x; \quad y'' = -3 \cos 6x \cdot 6 = -18 \cos 6x;$$

$$y''' = -18(-\sin 6x) \cdot 6 = 108 \sin 6x; \quad y^{(IV)} = 108 \cos 6x \cdot 6 = 648 \cos 6x.$$

Лекція 6. Дослідження функцій за допомогою похідної

Література:

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: навчальний посібник. – К.: центр учбової літератури, 2022, 448 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2017., 648 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. – К.: А.С.К., 2017., 480 с.

1. Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому проміжку $(a;b)$ і у внутрішній точці c цього проміжку $(a < c < b)$ вона приймає найбільше (найменше) значення. Тоді якщо існує похідна $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Теорема Ролля. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована в інтервалі $(a;b)$ і $f(a) = f(b)$. Тоді $\exists c \in (a;b): f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована в інтервалі $(a;b)$. Тоді $\exists c \in (a;b): f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Теорема Коші. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$, диференційовані в інтервалі $(a;b)$ і $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a;b)$. Тоді

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \exists c \in (a;b):$$

2 Дослідження функцій за допомогою першої похідної

Похідна функції має широке застосування при розв'язуванні різних задач математики, фізики, техніки та економіки. Так, наприклад, за допомогою похідної можна обчислити границю функції, знайти екстремум функції, інтервали монотонності, точки перегину функції та інше.

Інтервалами монотонності функції називаються ті інтервали, на яких функція або тільки зростає, або тільки спадає або залишається сталою.

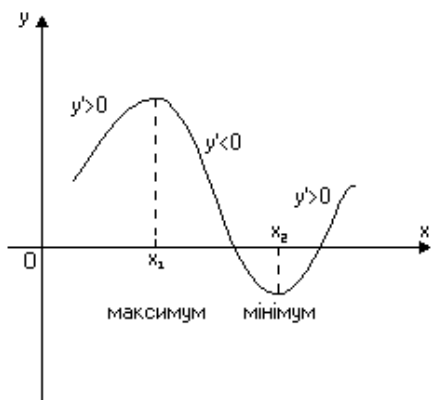
Стаціонарними (критичними) точками неперервної функції $y = f(x)$ є ті точки, в яких її похідна дорівнює нулю або не існує.

Теорема. Нехай на $[a;b]$ визначена і неперервна функція $y = f(x)$ і на інтервалі $(a;b)$ має скінчену похідну:

1) Для того, щоб $f(x)$ була *const* необхідно і достатньо, щоб $f'(x) = 0$ для $\forall x \in (a;b)$;

2) Для того, щоб $f(x)$ була *зростаюча (спадна)* на $[a;b]$ в широкому сенсі необхідно і достатньо, щоб $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a;b)$;

3) Для того, щоб $f(x)$ була *зростаюча (спадна)* на $[a;b]$ в узькому сенсі необхідно і достатньо, щоб $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $\forall x \in (a;b)$.



Функція $y=f(x)$ має **максимум** в точці x_0 , якщо $\exists \delta$ -окіл точки x_0 : для $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ виконується умова $f(x_0) > f(x)$ і має **мінімум** в точці, якщо виконується така умова: $f(x_0) < f(x)$.

Максимум і мінімум функції називають **екстремуми** функції.

Теорема (Необхідна умова існування екстремуму функції). Якщо функції $y=f(x)$ диференційована на $(a;b)$ і має екстремум в

точці x_0 ($a < x_0 < b$), то $f'(x_0)=0$.

Теорема (Достатня умова існування екстремуму функції). Якщо похідна функції $y=f(x)$ в точці $x=x_0$ обертається в нуль і при переході через цю точку змінює знака з “+” на “-” (з “-” на “+”) в точці $x=x_0$ функція має максимум (мінімум)

Теорема. Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 і її околі неперервні першу і другу похідні: $f'(x_0)=0$, $f''(x_0) \neq 0$, тоді функція $f(x)$ має в точці x_0 мінімум, якщо $f''(x_0) > 0$, максимум у випадку $f''(x_0) < 0$.

Приклад 1. Дослідити функцію $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2}$ на монотонність та критичні точки.

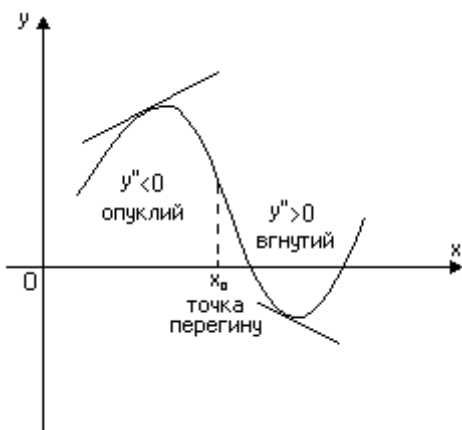
Розв’язання. Знайдемо похідну.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 2) - 2x(x^2 + 2)}{(x^2 - 2)^2} = -\frac{8x}{(x^2 - 2)^2}$$

$$-\frac{8x}{(x^2 - 2)^2} = 0, x=0 - \text{критична точка.}$$

Для $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; 0)$ $f'(x) > 0$. Отже, на цих проміжках функція зростає. Оскільки функція парна, то на проміжках $x \in (0; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ вона спадає. Тоді точка $x=0$ – точка максимуму, $f(0)=-1$

3. Вгнутість і опуклість графіка функції.



Вгнутим (опуклий вниз) називається графік диференційованої функції $y=f(x)$ в інтервалі $(a;b)$, якщо він знаходиться вище довільної його дотичної на цьому інтервалі.

Опуклим (опуклий вгору) називається графік диференційованої функції $y=f(x)$ в інтервалі $(a;b)$, якщо він знаходиться нижче довільної його дотичної на цьому інтервалі.

Точкою перегину неперервної функції називається та точка, яка відділяє вгнутість від опуклості її графіка.

Якщо при $x = x_0$ функція $y = f(x)$ має з обох боків нескінчену похідну одного і того ж знаку, то точку $M_0(x_0; y_0)$ також називають точкою перегину кривої $y = f(x)$.

Теорема. Графік функції $y = f(x)$ є вгнутим (опуклий) в деякому інтервалі $(a; b)$ тоді і тільки тоді, коли друга похідна функції $y = f(x)$ для всіх $x \in (a; b)$ додатна (від'ємна).

Теорема. Якщо $f''(x)$ функції $y = f(x)$ обертається в точці $x = x_0$ на нуль і при переході через цю точку змінює знак, то т. $(x_0; f(x_0))$ графіка цієї функції є точкою перегину.

4. Схема дослідження функції.

1. Знайти область визначення, область значення функції;
2. дослідити функцію на парність та непарність, періодичність;
3. знайти точки перетину графіка функції з осями системи координат, точки розриву, проміжки знакосталості функції;
4. знайти нулі та точки розриву похідної, інтервали монотонності функції, точки екстремуму та екстремальні значення функції;
5. знайти нулі та точки розриву другої похідної, інтервали опуклості графіка функції, точки перегину та значення функції в цих точках;
6. дослідити поведінку функції біля точок розриву та на нескінченості, знайти, якщо вони є асимптоти графіка

Приклад 1. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x}{x^2 - 25}$ та побудувати її графік.

1) Знайдемо область визначення функції. Необхідно знайти ті точки, в яких знаменник дробу дорівнює нулю і виключити їх. Одержимо $x^2 - 25 \neq 0$, $x^2 \neq 25$, $x_{1,2} \neq \pm 5$. Функція визначена в інтервалах $(-\infty; -5) \cup (-5; 5) \cup (5; +\infty)$.

2) Функція непарна. Тому її графік симетричний відносно початку координат. Функція не є періодичною. Це впливає навіть з того, що вона невизначена лише у двох точках.

3) Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат: при $x=0$, $y=0$, при $y=0$, $x=0$. Інших точок не існує.

4) Дослідимо функцію на монотонність та критичні точки. Для цього знайдемо першу похідну функції. Маємо:

$$y' = \frac{x^2 - 25 - 2x^2}{(x^2 - 25)^2} = \frac{-25 - x^2}{(x^2 - 25)^2} = -\frac{x^2 + 25}{(x^2 - 25)^2};$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 + 25 = 0 \Rightarrow x^2 \neq -25, x^2 + 25 > 0$$



Тоді $y' = -\frac{x^2 + 25}{(x^2 - 25)^2} < 0$ для всіх x із області неперервності.

Тобто функція спадна на кожному інтервалі області визначення.

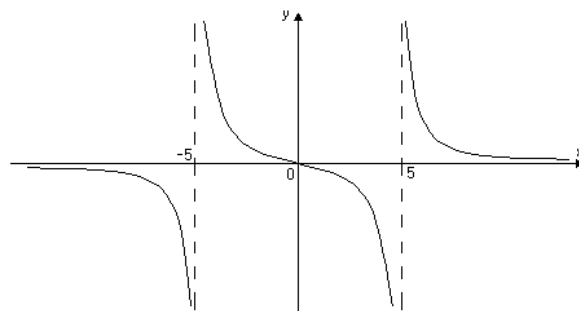
5) Дослідимо функцію на опуклість та точки перегину. Для цього знайдемо другу похідну.

$$y'' = \frac{-2x(x^2 - 25)^2 - 2(x^2 - 25) \cdot 2x(x^2 + 25)}{(x^2 - 25)^4} = \frac{-2x(x^2 - 25 - 2x^2 - 50)}{(x^2 - 25)^3} = \frac{2x(x^2 + 75)}{(x^2 - 25)^3}$$

Прирівняємо $y'' = 0$. Одержимо $2x(x^2 + 75) = 0 \Rightarrow x = 0, x^2 \neq -75$;

$x=0$ – критична точка.

Знайдемо знак другої похідної в кожному з інтервалів $(-\infty; -5)$; $(-5; 0)$; $(0; 5)$; $(5; +\infty)$. На проміжках $(-\infty; -5)$, $(0; 5)$ $y''(x) < 0$ – графік функції опуклий вгору; на проміжках $(-5; 0)$, $(5; +\infty)$ $y''(x) > 0$ – графік функції опуклий вниз. Точка $y(0) = 0$ є точкою перегину графіка функції.



ЛЕКЦІЯ 6. Інтегральне числення функцій однієї змінної

Література:

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: навчальний посібник. – К.: центр учбової літератури, 2022, 448 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2017., 648 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: збірник задач. – К.: А.С.К., 2017., 480 с.

Поняття інтеграл є фундаментальним поняттям математичного аналізу. Воно виникло, з одного боку, з потреб розв'язування задачі на обчислення площ, довжини кола, об'єму, роботи змінної сили, а з іншого боку – із необхідності відновлення функції за її похідною. В диференціальному численні розв'язували таку задачу: для заданої функції знайти її похідну. В інтегральному численні розв'язують обернену задачу: по заданій похідній відновити первісну функцію.

Нехай на деякому відрізку $[a;b]$ задана функція $f(x)$.

Функцію $F(x)$ називають *первісною* для функції $f(x)$ на деякому проміжку $[a;b]$, якщо $F'(x) = f(x)$ для $\forall x \in [a;b]$.

Це означення містить в собі обов'язкове виконання двох умов:

- 1) $F(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$;
- 2) в довільній внутрішній точці з проміжку $[a;b]$: $F'(x) = f(x)$

Теорема. Нехай $F(x)$ деяка первісна функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$, тоді функція $F(x)+C$, де C – довільна стала, також є первісною для функції $f(x)$.

Обернене твердження: довільна первісна для функції $f(x)$ в зазначеному проміжку, може бути представлена у вигляді $F(x)+C$.

Множина всіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$ називають *невизначеним інтегралом* функції $f(x)$ на цьому проміжку.

Позначають $\int f(x)dx$; $\int$ - знак невизначеного інтеграла; $f(x)$ – підінтегральна функція; $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, dx – диференціал незалежної змінної інтегрування.

За означенням маємо:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Геометричний зміст невизначеного інтеграла. Графік первісної називають інтегральною кривою, тому невизначеному інтегралу відповідає множина інтегральних кривих, яку можна отримати паралельним перенесенням довільної інтегральної кривої в напрямку осі Оу.

1. Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральній функції; диференціал від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральному виразу.

$$(\int f(x)dx)' = f(x)$$

а) Дійсно, за означенням $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ – деяка первісна, а C – довільна $const$, тому $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = f(x)$

б) Дійсно, за означенням

$$d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = dF(x) + dC = F'(x)dx = f(x)dx$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала будь-якої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної $const$ тобто $\int dF(x) = F(x) + C$

$$\text{Дійсно, } \int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

3. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій = алгебраїчній сумі інтегралів від кожної окремої функції

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \quad (*)$$

Дійсно, $\int f(x)dx = F(x) + C_1$ і $\int g(x)dx = G(x) + C_2$. Розглянемо функції $(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$ Функція $F(x) \pm G(x)$ є первісною для функції $f(x) \pm g(x)$, тому $\int (f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm G(x) + C$

Формулу (*) треба розуміти як рівність двох множин. За доведеним множина функцій в лівій частині (*) має вигляд $\{F(x) \pm G(x) + C\} = A$, а в правій частині $\{(F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2)\} = B$ Оскільки C_1, C_2, C – довільні $const$, тому цю рівність $A=B$ треба розуміти, як рівність двох множин, що співпадають, або $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

4. Якщо функція $f(x)$ на проміжку $[a;b]$ має первісну, то для будь-якої постійної k , функція $kf(x)$ також має в цьому проміжку первісну

$$\int k f(x)dx = k \int f(x)dx$$

Нехай $F(x)$ первісна для $f(x)$ на проміжку $[a;b]$, тоді вона неперервна в цьому проміжку, а в кожній точці проміжку $F'(x) = f(x)$. Знайдемо $(kF(x))' = kf(x)$, тому $\int kf(x) = kF(x) + C$ $A = \{k \cdot F(x) + C\}$, $B = \{k \cdot (F(x) + C_1)\} = \{k \cdot F(x) + k \cdot C_1\}$

Отже, за умови $k \neq 0$, множина $A =$ множині B ; при $k = 0$, $\int 0 dx = 0$ формула місця немає.

2. Основні методи інтегрування

➤ Безпосереднє або табличне інтегрування.

Цей метод інтегрування базується безпосередньо на доведених властивостях та таблиці інтегралів

Приклад Знайти інтеграл $\int (10x^3 + \cos 3x) dx$

Розв'язання

$$\int (10x^3 + \cos 3x) dx = \int 10x^3 dx + \int \cos 3x dx = 10 \frac{x^4}{4} + \frac{1}{3} \sin 3x + C$$

➤ Інтегрування заміною змінної (підстановкою)

Нехай $F(x)$ первісна для $f(x)$ на проміжку $[a;b]$, а $x=u(t)$ неперервна і диференційована на відрізку $[\alpha;\beta]$ функція змінної t , причому якщо t змінюється в $[\alpha;\beta]$, то x змінюється в $[a;b]$ і $u(\alpha)=a$, $u(\beta)=b$ тоді функція $f(u(t) \cdot u'(t))$ має первісну на відрізку $[\alpha;\beta]$ і справедлива формула

$$\int f(x) dx = \int f(u(t)) u'(t) dt$$

Дійсно, оскільки при змінненні t на відрізку $[\alpha;\beta]$ x змінюється в $[a;b]$, тоді складена функція $F(u(t))$ визначена на відрізку $[\alpha;\beta]$, знайдемо її похідну.

$(F(u(t)))' = F'(u(t)) \cdot u'(t) = f(u(t)) \cdot u'(t)$ Отже, $F(u(t))$ первісна для $f(u(t)) \cdot u'(t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$ тому

$$\int f(u(t)) u'(t) dt = F(u(t)) + C = F(x) + C = \int f(x) dx$$

Приклад Знайти інтеграл $\int \tan x dx$

Розв'язання. $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left| \begin{matrix} u = \cos x \\ -du = \sin x dx \end{matrix} \right| = \int -\frac{du}{u} = -\ln|u| + C =$
 $= \ln|\cos x| + C.$

➤ Інтегрування частинами

Нехай на відрізку $[a;b]$ дано дві функції $u(x)$ та $v(x)$, які є неперервними і диференційованими. Якщо існує первісна для функції $u(x) \cdot v'(x)$, то вона

існує і для функції $u'(x) \cdot v(x)$, причому має місце формула:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx (*) \text{ або}$$

$$\int u(x) \cdot dv(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot du(x)$$

Приклад 11. Знайти інтеграл $\int x^2 \cos 2x dx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу для знаходження інтеграла:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos 2x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad du = 2x dx \\ dv = \cos 2x dx, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x \cdot 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin 2x dx, \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \left(-\frac{1}{2} x \cos 2x - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \right) = \frac{x^2}{2} \sin 2x + \\ &+ \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

3. Визначений інтеграл

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана функція $f(x)$. Розіб'ємо цей відрізок довільно на n частин: $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n=b$, $\Delta x_k = x_{k-1} - x_k$ ($k=1,2,\dots,n$). На кожному з відрізків виберемо довільно точку ξ_k ($x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$) складемо суму:

Ця сума має назву інтегральної суми функції $f(x)$ на $[a;b]$ і залежить від способу розбиття $[a;b]$ на частини та від вибору точок ξ_k на кожному Δx_k .

Число I називають *границею інтегральної суми* S_n за умови $\max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \rightarrow 0$ якщо для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при виконанні умови $\max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k < \delta(\varepsilon)$

незалежно від способу складання S_n має місце умова: $|S_n - I| = \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - I \right| < \varepsilon$

Границя інтегральної суми $S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ за умови $\max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \rightarrow 0$ називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на $[a;b]$ і позначається $\int_a^b f(x) dx$, де $\int$ - знак інтеграла, x - змінна інтегрування, $f(x)$ - підінтегральна функція, $f(x) dx$ - підінтегральний вираз, числа a і b - нижня та верхня межі інтегрування. Саму функцію f при цьому називають *інтегрованою* за Ріманом або просто *інтегрованою* на відрізку $[a;b]$. Таким чином, за

означенням $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Якщо $f(x)$ неперервна і невід'ємна на $[a;b]$, то визначений інтеграл дорівнює площі криволінійної трапеції обмеженої графіком функції $y=f(x)$, віссю Ox , прямими $x=a$, $x=b$.

Фізичний зміст визначеного інтеграла. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то визначений інтеграл дорівнює роботі сили, проекція вектора якої на вісь Ox дорівнює $f(x)$, при переміщенні точки прикладання сили з положення a в b :

- 1) Якщо $a=b$, то $S=A=0$
- 2) При зміні напрямку переміщення точки прикладання сили, роботу треба помножити на (-1) .

Необхідна умова інтегрованості. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Нижньою (верхньою) сумою Дарбу функції $f(x)$, обмеженої на відрізку $[a;b]$, називають суму $\underline{S}_n = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$ ($\overline{S}_n = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$).

$$m_k = \inf_{x \in \Delta x_k} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in \Delta x_k} f(x)$$

Теорема. Для того, щоб функція $y=f(x)$ обмежена на $[a;b]$ була інтегрованою на $[a;b]$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} (\overline{S}_n - \underline{S}_n) = 0$ або, що рівносильно умові: для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

при виконанні умови $\max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k < \delta(\varepsilon)$ незалежно від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частини має місце умова: $|\overline{S}_n - \underline{S}_n| < \varepsilon$

Достатні умови інтегрованості функції за Ріманом

Функція $y=f(x)$ інтегрована за Ріманом на відрізку $[a;b]$, якщо виконується хоча б одна з умов:

1. $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a;b]$;
2. $f(x)$ на відрізку $[a;b]$;
3. $f(x)$ є монотонною на відрізку $[a;b]$;
4. $f(x)$ є обмеженою на відрізку та має на $[a;b]$ не більше ніж зчислену множину точок розриву.

Для обчислення визначеного інтеграла застосовують формулу, яка зв'язує визначений інтеграл та первісну функцію. Ця формула має вигляд

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

де $F(x)$ – первісна функція, а a та b – межі (границі) інтегрування і її називають формулою *Ньютона-Лейбніца*.

Приклад 22. Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^{2x} dx$.

Розв'язання. При обчисленні визначеного інтеграла за формулою Ньютона-Лейбніца необхідно знайти первісну функцію для функції e^{2x} . Одержимо

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (e^{2 \cdot 1} - e^0) = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

Приклад 23. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin 2x}{2 \cdot 2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{1}{4} (\sin \pi - \sin 0) = \frac{\pi}{4}$$

4. Застосування визначених інтегралів до задач геометрії

- *Площу криволінійної трапеції* для неперервної на сегменті $[a;b]$ функції $y=f(x)>0$, згідно геометричного змісту інтеграла, обчислюють за формулою $S = \int_a^b f(x) dx$

- *Площу криволінійного сектора* в полярній системі координат обчислюють за формулою $S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi$ де $\rho = \rho(\varphi)$ неперервна функція.

- *Довжину дуги лінії* на сегменті $[a;b]$ неперервної разом зі своєю похідною функції $y=f(x)$ обчислюють за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \text{ або за формулою } l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt, \text{ якщо функція}$$

задана параметрично $x=x(t), y=y(t), t \in [t_1; t_2]$.

У випадку, коли крива задана полярним рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ $\forall \varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$, то $l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$

- *Об'єм тіла* обертання криволінійної трапеції з основою $[a;b]$ навколо осі Ox , яка обмежена неперервною функцією $y=f(x)$, обчислюється за формулою $V = \pi \int_a^b y^2 dx$.

Якщо криволінійна трапеція з основою $[c;d]$ обертається навколо осі Oy , то об'єм тіла обертання обчислюють за формулою

$$V = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy, \quad \text{де}$$

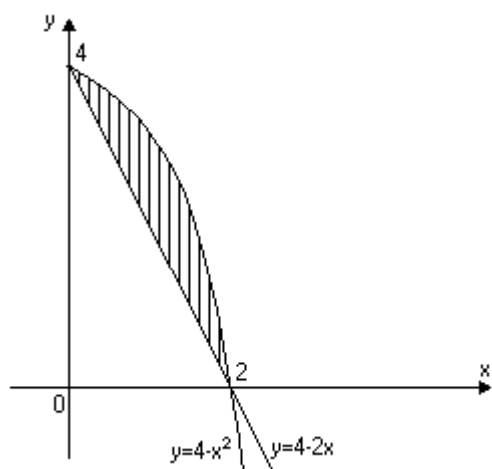
$x = \varphi(y)$ неперервна для всіх $y \in [c;d]$

Приклад 28. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y = 4 - x^2$ та $y = 4 - 2x$.

Розв'язання. Зобразимо фігуру.

Знайдемо точки перетину ліній. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 4 - 2x, \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = 4 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0, \quad x_1 = 0, x_2 = 2$$



Площа фігури дорівнює різниці площ двох криволінійних трапецій, площі яких обчислимо за формулою. Одержимо

$$\begin{aligned} S &= S_2 - S_1 = \int_0^2 (4 - x^2) dx - \int_0^2 (4 - 2x) dx = \\ &= \int_0^2 (4 - x^2 - 4 + 2x) dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \\ &= \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ (кв.од.)} \end{aligned}$$