Міністерство освіти і науки України
ВСП «Ковельський промислово-економічний фаховий коледж
Луцького національного технічного університету»

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій для здобувачів
освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр
технічних спеціальностей заочної форми здобуття освіти

Ковель, 2026

УДК 531(075)

Б12

Затверджено до видання методичною радою ВСП «КПЕФК ЛНТУ»

протокол № ___ від « ___» __________________ 2026 року

Голова методичної ради ВСП «КПЕФК ЛНТУ» ____________ Олена ГОНЧАРЕНКО

Розглянуто і схвалено на засіданні циклової комісії з галузевого машинобудування ВСП «КПЕФК ЛНТУ»,

протокол №5 від « 15 » січня 2026 року

Голова циклової комісії ВСП «КПЕФК ЛНТУ» _______________ Денис РУСАКОВ

Друковане видання передано до репозиторію бібліотеки ВСП «КПЕФК ЛНТУ»

Завідувач бібліотеки ВСП «КПЕФК ЛНТУ» _____________ Неля ТЕЛЮЧИК

Укладач: ___________ Степан БАБАРИКА, викладач ВСП «КПЕФК ЛНТУ»

Рецензент: ___________ Олександр ПОВСТЯНОЙ, д.т.н., проф. кафедри автоматизації та комп’ютерно-інтегрованих технологій ЛНТУ

Відповідальний за випуск: ____________ Леся ПРОКОПЧУК, методист ВСП «КПЕФК ЛНТУ»

Р88 Технічна механіка [Текст]: Конспект лекцій для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр технічних спеціальностуй заочної форми здобуття освіти. / уклад. Степан Бабарика. – Ковель: ВСП «КПЕФК ЛНТУ», 2026. – 60 с.

У конспекті лекцій розглянуті теоретичні основи теоретичної механіки та опору матеріалів. Розкрито фізичний сенс законів, теорем і формул, наведені кольорові ілюстрації. Матеріал дозволяє засвоїти теоретичні основи механіки для можливості подальшого вивчення наступних спеціальних освітніх компонентів. Призначений для здобувачів освіти машинобудівного профілю.

Зміст

Розділ 1. Теоретична механіка

Лекція 1

План:

1. Вступ
2. Зміст дисципліни та її зв’язок з іншими дисциплінами
3. Предмет технічної механіки

Вступ

Механіка – це наука про механічний рух і взаємодію матеріальних тіл. *Теоретична механіка* – це розділ механіки, який вивчає закони руху тіл і загальні властивості цих рухів.

Механіка – одна з найдавніших наук. Термін «механіка» запровадив видатний стародавній філософ Арістотель. Перші наукові основи вчення про рівновагу тіл знаходимо в працях Архімеда. На всіх етапах свого розвитку механіка була тісно зв’язана з розвитком продуктивних сил суспільства і сприяла технічному прогресу.

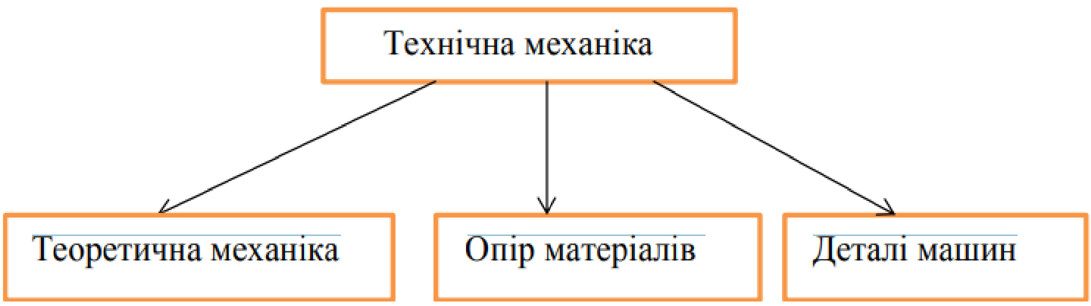
Основною метою вивчення дисципліни є оволодіння методами і прийомами, які використовуються при всіх технічних розрахунках, що пов’язані з проектуванням різноманітних споруд і машин, їх подальшою експлуатацією.

Головне завдання навчальної дисципліни полягає в придбанні навиків розумно користуватись законами і методами розрахунків опорних реакцій простих стрижневих і балочних систем; аналізу видів руху та розрахунку його кінематичних характеристик; визначення характеру навантаження елементів конструкцій у залежності від виду та розташування зовнішніх сил; проведення розрахунків на міцність для типових схем навантаження.

Значення дисципліни полягає в формуванні майбутнього техніка-механіка як спеціаліста. Технічна механіка дозволяє не тільки пояснити важливіші явища в оточуючому середовищі, а також є базою для багатьох технічних дисциплін.

2. Зміст дисципліни та її зв'язок з іншими дисциплінами

Дисципліна «Технічна механіка» включає в себе три частини: теоретичну механіку, опір матеріалів та деталі машин.



Теоретична механіка – це наука що вивчає загальні закони механічного руху матеріальних тіл і встановлює загальні прийоми та методи розв'язку питань пов'язаних з цим рухом. Увага приділяється вивченню основних понять і аксіом статики, умов рівноваги збіжних сил, плоскої системи сил довільно розташованих, просторової системи сил, визначенню центра ваги тіла, розділи кінематика та динаміка

Опір матеріалів – увага приділяється вивченню основних положень, таких видів деформації, як розтяг (стиск); крутіння; згин; гіпотез міцності; розрахунку на міцність; деталі машин – з'єднання деталей, розрахунок цих з'єднань на міцність, загальні відомості про передачі, редуктори, вали, осі, підшипники, муфти.

Деталі машин – це технічна дисципліна в якій вивчають методи, норми і правила розрахунку і конструювання деталей і складальних одиниць загального призначення.

Механіка – це цілий комплекс дисциплін, які вивчають механічний рух різних матеріальних тіл.

4. Предмет технічної механіки.

Механіка – це наука про механічну взаємодію матеріальних тіл. **Механічною взаємодією тіл** називаються такі дії матеріальних тіл одне на друге, в результаті яких виникає рух цих тіл або зміна їхньої форми (деформація). За основну міру цих дій прийнято брати умовну величину, яка називається силою.

Механічним рухом тіла називається зміна положення тіла відносно іншого тіла, яка відбувається з плином часу.

Приклади механічних рухів:

1) рухи небесних тіл;

2) рух наземних, водних і літальних апаратів;

3) рухи частин машин і механізмів;

Для вимірювання всіх механічних величин досить ввести три основні одиниці виміру. Двома з них прийнято вважати одиниці довжини (м) і часу (с). У міжнародній системі одиниць виміру фізичних величин (SI) третьою одиницею вибрано одиницю виміру маси (кг). Отже, основними одиницями вимірювання механічних величин в SI є метр (1 м), кілограм (1 кг), секунда (1 с). Одиниця виміру сили в системі SI є похідною одиницею, що називається ньютоном (1 Н) і дорівнює силі, яка надає масі в 1 кг прискорення 1м/с2 , тобто Н=кг · м/с2.

Лекція 2. Основні поняття та аксіоми статики

План:

1. Основні поняття статики
2. Аксіоми статики

1. Основні поняття статики

Статикою називається розділ теоретичної механіки, в якому:

1) викладається загальне вчення про сили;

2) вивчаються умови рівноваги систем сил, що прикладені до твердих тіл;

3) перетворюються одні системи сил в інші, їм еквівалентні.

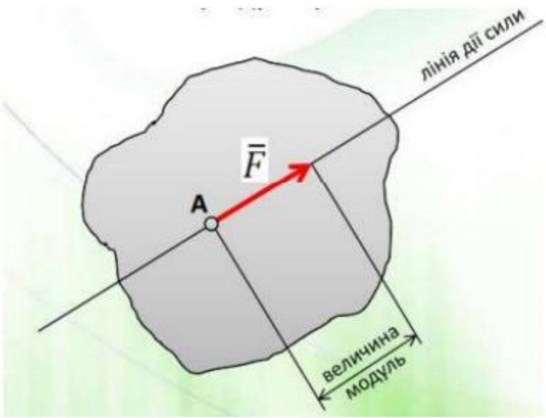
Говорячи коротко, статика – це наука про сили.

Сила – це кількісна міра взаємодії матеріальних тіл, що визначає інтенсивність та напрям цієї взаємодії.

Сила характеризується:

1. числовими значеннями; 2. напрямом дії; 3. точкою прикладання.

Числове значення сили встановлення за статичним і динамічним її правилами і повністю відповідає визначенню вектора (зображується Z вектором)



Довжина вектора, який зображує силу у відповідному масштабі, дорівнює числову значенню сили. Вектор сили прикладений в певній точці тілі (точка А) і направлений у бік дії сили. Пряма, за якою направлений вектор сили, називається лінією однієї сили.

Точка А (т. А) – точка прикладання сили

Одиниці виміру сили в системі СІ

1 Ньютон (Н) або 1 кілоНьютон (кН)   1кН = 1000 Н 1кГ = 1 кгс = 9,81 Н≈ 10 Н

Розмірність сили: [сила]= ([маса]·[довжина])/[час] 1 Н = (1 кг·1 м)/1 с^2 .

Зовнішні сили класифікують за *способом прикладання і за характером дії на тіло.*

За характером дії на тіло зовнішні сили поділяють на статичні і динамічні.

Статичним називається таке навантаження, при якому прискорення тіла чи його частин відсутні, або настільки малі, що ними можна нехтувати. Таке навантаження має місце при повільному зростанні прикладеної до тіла сили від нуля до кінцевого значення.

Динамічним називають навантаження, при якому виникають значні прискорення тіла чи його частин і пов’язані з ними сили інерції, які необхідно брати до уваги.

Системою сил (F1 F2.. Fn) називають сукупність декількох сил, що діють на одне тіло або на систему тіл.

Системи сил бувають:

1. Плоска паралельна. 2. Плоска збіжна. 3. Плоска довільна. 4. Просторова збіжна. 5. Просторова довільна.

Матеріальна точка – тіло, яке має масу, але розмірами якого можна знехтувати (скорочено – точка).

Механічна система – сукупність матеріальних точок, рух і положення яких взаємопов’язані (скорочено – система).

Абсолютно тверде тіло – система матеріальних точок, відстань між якими є незмінною і які безперервно заповнюють деяку частину простору (скорочено – тіло)

Рисунок 2 - Матеріальна точка. Система матеріальних точок. Абсолютне тверде тіло.

2. Аксіоми статики

Статика базується на декількох вихідних положеннях (аксіомах), які беруться без математичних доказів.

Аксіома 1 (про рівновагу системи двох сил)

Дві сили, що діють на абсолютно тверде тіло, взаємно зрівноважуються тоді і тільки тоді, коли вони рівні за модулем і спрямовані по одній прямій у протилежних напрямках (рис.3). Тобто

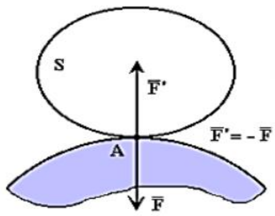


Рисунок 3 - Зрівноважена система сил

Аксіома 2 (приєднання та відкидання зрівноважених сил). *Від приєднання до тіла або відкидання від нього зрівноваженої системи сил рівновага тіла не порушується.*

Це означає, що коли до системи сил, яка діє на тверде тіло приєднати будь-яку зрівноважену систему сил, то одержимо систему, еквівалентну даній **Висновок**: не змінюючи кінематичного стану абсолютно твердого тіла, силу можна переносити вздовж лінії її дії, зберігаючи незмінними її модуль і напрям.

$$(\overline{F}_B, \overline{F}_B^{\prime}) \sim 0,\ \text{де}$$

$$\overline{F}_B = \overline{F}_A;\ \overline{F}_B^{\prime} = -\overline{F}_A.$$

Тоді відповідно до аксіоми 2 одержимо:

$$\overline{F}_A \sim (\overline{F}_A, \overline{F}_B, \overline{F}_B^{\prime})$$

(рис. 4,б). Згідно з аксіомою 1 система сил (F_A F'_B)~0, а згідно з аксіомою 2 їх можна відкинути

(рис. 4,в), тобто F_A ~F_B . Таким чином, наслідок доведено

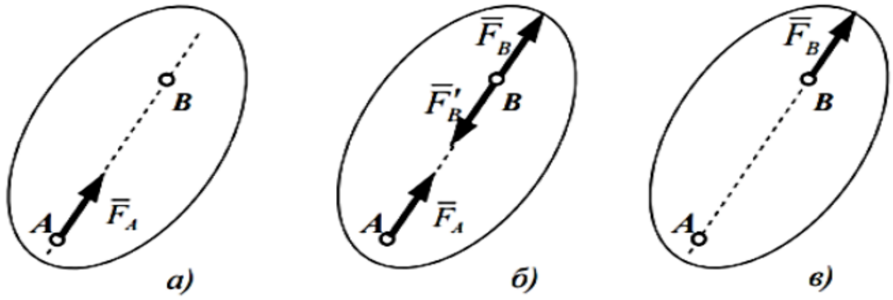


Рисунок 4 - Зрівноважена система сил

Аксіома 3 (паралелограм сил). *Рівнодійна двох сил, прикладених в одній точці, прикладена в тій самій точці і є діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах* (рис.5).

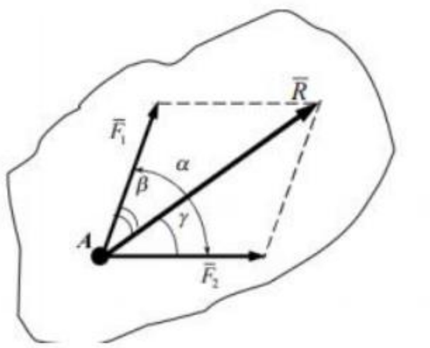


Рисунок 5 – Паралелограм сил

Це положення математично можна виразити таким геометричним рівнянням:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2,$$

Модуль рівнодіючої знаходять як величину діагоналі паралелограма, побудованого на силах, як на сторонах:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\overline{F}_1, \overline{F}_2)}$$

де α – кут між лініями дії сил F_1 та F_2.

Аксіома 4 рівності дії та протидії. *Будь-які дії відповідає рівна та протилежно направлена протидія* (рис.6). Згідно з цією аксіомою сили дії двох тіл рівні за модулем і направлені по одній прямій у протилежні сторони.

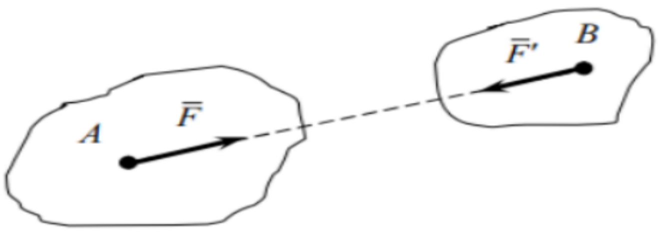


Рисунок 6 – Рівності дії та протидії сил

Лекція 3. Пара сил і момент пари, основні властивості пари сил. Теорема о складанні пар сил

План:

1. Момент сили відносно точки

2. Момент сили відносно осі

3. Пара сил та її момент

4.Властивості пари сил:

5. Еквівалентність пари сил

6.Умова рівноваги системи пар сил

1.Момент сили відносно точки

Поняття моменту сили відносно точки запровадив у механіку італійський вчений і художник Леонардо да Вінчі.

Моментом сили відносно точки називають добуток модуля сили на її плече (рис.1):

$$M_{(0)}F=F\cdot h$$

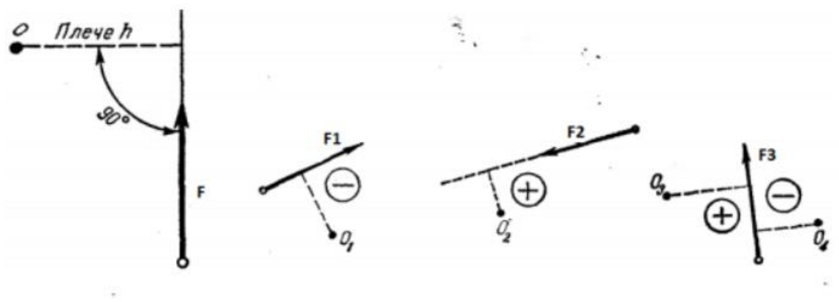


Рисунок 1 - Момент сили відносно точки

Точку відносно якої беруть момент сили, називають **центром моменту**.

Плечем сили відносно точки беруть найкоротшу відстань від центра моменту до лінії дії сили.

$$[M]=[F]\cdot[h]= \text{сила} \cdot \text{довжина} = \text{Ньютон} \cdot \text{метр} = \text{Н}\cdot\text{м}$$

Момент сили вважатимемо додатним, якщо сила намагається обертати своє плече навколо центра моменту проти годинникової стрілки і навпаки (рис.2).

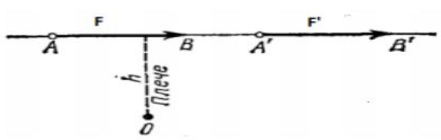
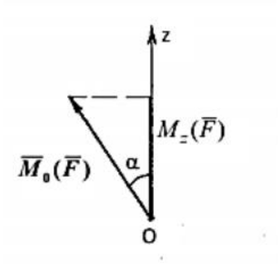


Рисунок 2 - Момент сили відносно плеча

Одна й та сама сила відносно різних точок може створювати додатній і відємний моменти . Момент сили відносно точки, що лежить на лінії дії цієї сили, дорівнює нулю, оскільки плече тут дорівнює нулю. За рис.2 видно, що момент сили відносно точки не змінюється від перенесення сили вздовж лінії її дії, оскільки модуль сили і плече залишаються незмінними.

2.Момент сили відносно осі.

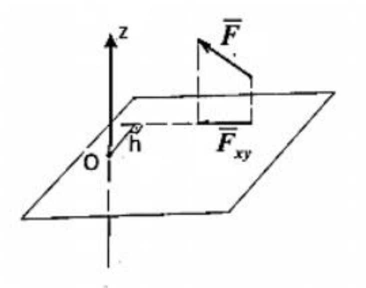
Моментом сили відносно осі z називається проекція на цю вісь вектора моменту сили відносно точки, що лежить на осі:



$$\grave{I}_z(\overline{F}) = \left[\overline{M}_0(\overline{F})\right]_z = M_0(\overline{F}) \cdot \cos\alpha .$$

Момент сили відносно осі характеризує обертальну дію сили навколо даної осі.

Правило визначення моменту сили F відносно осі z:



1. Провести площину, перпендикулярну до осі z і знайти точку O перетину осі з площиною.
2. Спроектувати силу на проведену площину (вектор $\overline{F}_{xy}$ - проекція сили $\overline{F}$ на площину).
3. Знайти момент отриманої сили $\overline{F}_{xy}$ відносно точки перетину осі з площиною O_{xy}: $\grave{I}_0(\overline{F}_{\eth\acute{o}}) = \pm F_{xy} \cdot h$.

Взяти знак «+», якщо з додатного кінця осі z видно, що проекція сили $\vec{F}_{xy}$ прагне обертати площину навколо осі проти руху годинникової стрілки, і знак «-» - якщо за стрілкою годинника.

4. Момент сили $\overline{F}$ відносно осі z визначити як

$$\grave{I}_z(\overline{F}) = M_0(\overline{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h.$$

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:

а) сила паралельна осі (в цьому випадку проекція сили на площину $F_{xy} = 0$);

б) лінія дії сили перетинає вісь (при цьому плече $h = 0$).

1. Пара сил та її момент

Парою сил називається система двох розташованих в одній площині сил, які рівні за величиною, протилежно напрямлені і не лежать на одній лінії дії.

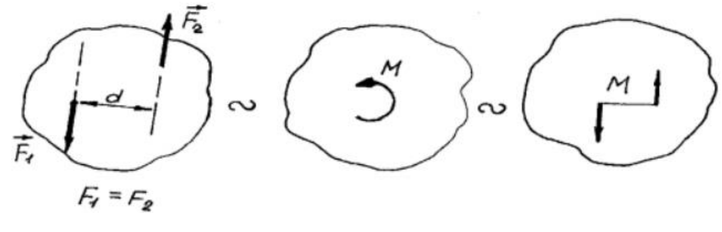


Рисунок 3- Момент пари сил

Плече пари d - найкоротший відрізок між лініями дії сил, що складають пару.

Моментом пари сил називається вектор $\overline{M}(\overline{F1}, \overline{F2})$, модуль якого дорівнює добутку однієї з сил пари на плече пари, напрямлений перпендикулярно до площини дії пари у той бік, звідки обертання пари сил видно проти ходу стрілки годинника.

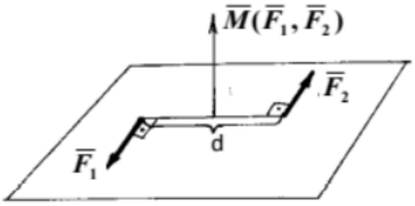


Рисунок 4 - Обертання пари сил

Модуль моменту пари $\overline{M}(\overline{F}, \overline{F2})$ = F1·d=F2·d

4.Властивості пари сил:

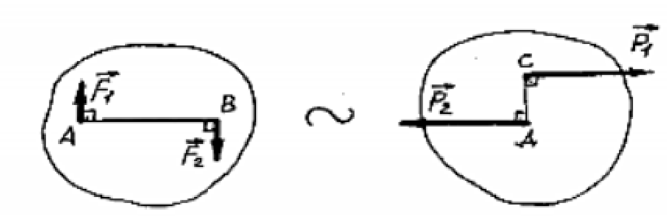
1. Пара сил не має рівнодійної. Тому пару сил не можна замінити або зрівноважити однією силою; її можна зрівноважити тільки іншою парою.

2. Геометрична сума моментів сил, які складають пару, відносно будьякої точки О не залежить від вибору цієї точки і дорівнює моменту пари сил:

$$\overline{\Gamma}_0(\overline{F}_1) + \overline{M}_0(\overline{F}_2) = \overline{M}(\overline{F}_1, \overline{F}_2).$$

3. Дві пари еквівалентні, якщо їх моменти геометрично рівні.

Наслідком цієї властивості є те, що пару сил, яка діє на абсолютно тверде тіло, можна переміщати у площині її дії, або у паралельну площину, при цьому можна змінювати модулі сил або плече пари, але зберігати величину моменту і напрям обертання:



якщо $F_1 \cdot AB = P_1 \cdot СД.$

4.Система кількох пар, як завгодно розташованих у просторі, еквівалентна одній парі, момент якої дорівнює геометричній сумі моментів складових пар:

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i.$$

5. Еквівалентність пари сил

Дві пари сил називаються **еквівалентними**, якщо їх дії на тіло однакові.

Властивості пар сил:

1. Можна змінювати величину сил і плече пари, не змінюючи величину моменту і напрямок обертання.

2. Пару сил можна як завгодно переміщати у площині її дії.

3. Пару сил можна переміщати у паралельну площину даного тіла.

Всі ці властивості не змінюють ні величини, ні напрямку моменту пари, тому є **еквівалентними перетвореннями**. Систему пар сил можна привести до найпростішого вигляду.

6.Умова рівноваги системи пар сил:

Пари сил, як завгодно розташовані у просторі, перебувають у рівновазі, якщо геометрична сума їх моментів дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i = 0.$$

Основні властивості та основні перетворення пари сил такі:

а) пару сил можна переносити в площині її дії, у тому числі й повертати на будь-який кут;

б) пару сил можна переносити в будь-яку площину, паралельну площині цієї пари;

в) можна змінювати сили, що утворюють пару та її плече, не змінюючи моменту пари;

г) декілька пар сил, довільно розміщених у просторі, можна замінити однією парою, момент якої дорівнює геометричній сумі моментів складових пар.

З викладеного можна зробити такий висновок: *механічний вплив у статиці характеризується трьома типами векторів: силою – ковзним вектором, моментом сили відносно точки – прикладеним вектором і парою сил – вільним вектором.*

Лекція 4. Плоска система збіжних сил. Додавання сил. Геометрична умова рівноваги плоскої системи збіжних сил

<u>План:</u>

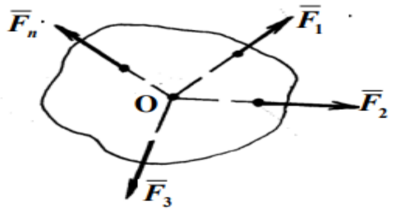
1 Система збіжних сил. Аналітичне додавання двох сил.

2 Геометричний спосіб додавання сил

3 Проекція сили на ось

1. Система збіжних сил.

Система збіжних сил - це така система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці. Тут точка О - точка перетину сил.



Із 4-ї аксіоми статики відомо, що рівнодіюча двох сил, прикладених до однієї точки, прикладена в цій точці і є діагоналлю паралелограма, побудованого на даних силах.

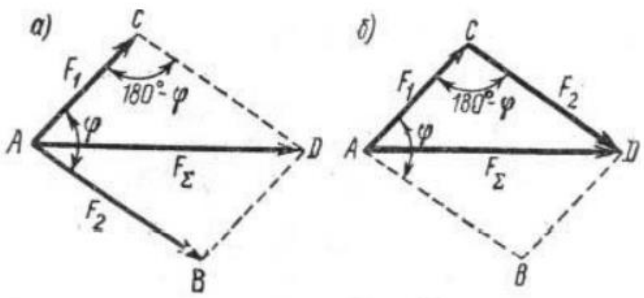


Рис.1.

Так, рівнодіюча двох сил F1 і F2, прикладених до точки А , буде сила F_Σ, що являє собою діагональ паралелограма ACDB, побудованого на векторах заданих сил. Визначення рівнодіючої двох сил за правилом паралелограма називається векторним, або геометричним додаванням і виражається векторною рівністю $\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

При графічному визначенні рівнодіючої двох сил замість правила паралелограма можна користуватися правилом трикутника. З довільної точки А проводимо, зберігаючи масштаб і заданий напрямок, вектор першої складової сили F1, з його кінця проводимо вектор, паралельній і рівній другій складовій силі F2. Замикаюча сторона AD трикутника й буде шуканою рівнодіючою F_Σ. Її можна також представити як діагональ паралелограма ABDC, побудованого на заданих силах. Модуль рівнодіючої двох сил можна визначити із трикутника ACD:

$$F_\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180° - \varphi),\ \text{где}\ \cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi,$$

поэтому $F_\Sigma^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi,$

$$F_\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\varphi}.$$

На підставі четвертої аксіоми одну силу F_Σ можна заміняти двома складовими силами F_1 і F_2. Таку заміну часто роблять при рішенні завдань статики.

2 Геометричний спосіб додавання сил

Рішення багатьох завдань механіки пов'язане з відомої з векторної алгебри операцією додавання векторів і, зокрема, сил. Величину, рівну геометричній сумі сил якої-небудь системи, будемо називати головним вектором цієї системи сил. Поняття про геометричну суму сил не слід змішувати з поняттям про рівнодіючу. Для багатьох систем сил, як ми побачимо надалі, рівнодіючої взагалі не існує, геометричну ж суму (головний вектор) можна обчислити для будь-якої системи сил.

Геометрична сума (головний вектор) будь-якої системи сил визначається або послідовним додаванням сил системи за правилом паралелограма, або побудовою силового багатокутника. Другий спосіб є більше простим і зручним. Для знаходження цим способом суми сил F_1, F_2, ... F_n, (рис. 2, а), відкладаємо від довільної точки О (рис. 2, б) вектор, що зображує в обраному масштабі силу F_1, від точки а відкладаємо вектор , що зображує силу F_2, від точки b відкладаємо вектор bc, що зображує силу F_3 і т.д.; від кінця m передостаннього вектора відкладаємо вектор mn, що зображує силу F_n. З'єднуючи початок першого вектора з кінцем останнього, одержуємо вектор $\Sigma F = R$, що зображує геометричну суму або головний вектор сил, що складаються:

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \ldots + \overline{F_n} \quad \text{або} \quad \overline{R} = \sum \overline{F_k}.$$

Від порядку, у якому будуть відкладатися вектори сил, модуль і напрямок R не залежать. Легко побачити, що виконана побудова представляє собою результат послідовного застосування правила силового трикутника.

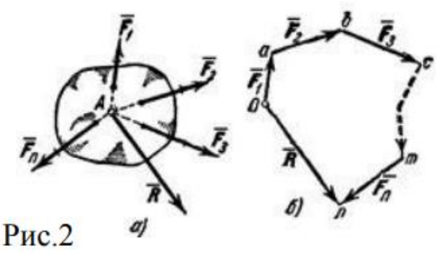


Рис.2

Фігура, що побудована на рис. 2, б, називається силовим (у загальному випадку векторним) багатокутником. Таким чином, геометрична сума або головний вектор деяких сил зображується замикаючою стороною силового багатокутника, побудованого із цих сил (правило силового багатокутника). При побудові векторного багатокутника варто пам'ятати, що у всіх векторів стрілки, що складаються, повинні бути спрямовані в одну сторону (за обходом багатокутника), а у вектора - у протилежний бік.

Геометрична умова рівноваги.

Так яка рівнодіюча збіжних сил визначається як замикаюча сторона силового багатокутника, побудованого із цих сил, то вона може звернутися в нуль тоді й тільки тоді, коли кінець останньої сили в багатокутнику збігається з початком першої, тобто коли багатокутник **замкнений**.

Отже, для рівноваги системи збіжних сил необхідно, щоб силовий багатокутник, побудований із цих сил, був замкнений.

3 Проекція сили на вісь.

Віссю називають пряму лінію, якій приписаний певний напрямок.

Проекція вектора на ось є скалярною величиною, що визначається відрізком осі, який відтинається перпендикулярами, опущеними на неї з початку й кінця вектора.

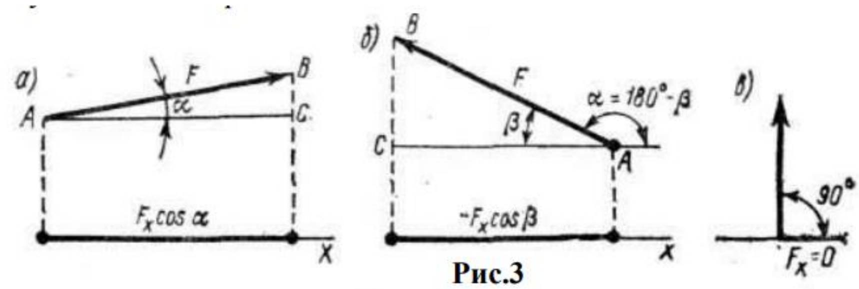


Рис.3

Проекція вектора вважається позитивною (+), якщо напрямок від початку проекції до її кінця збігається з позитивним напрямком осі.

Проекція вектора вважається негативною (—), якщо напрямок від початку проекції до її кінця протилежно позитивному напрямку осі.

Отже, проекція сили на ось координат дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між вектором сили й позитивним напрямком осі.

Силу, розташовану на площині хоу (рис.4), можна спроектувати на дві координатні осі Ох і Оу. На малюнку зображена сила F і її проекції Fx, Fy. Через те, що проекції утворюють між собою прямий кут, із прямокутного трикутника АСВ знаходимо:

$$\left.\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \\ \cos(\vec{F},\widehat{\ } x) &= F_x/F; \\ \cos(\vec{F},\widehat{\ } y) &= F_y/F. \end{aligned}\right\}$$

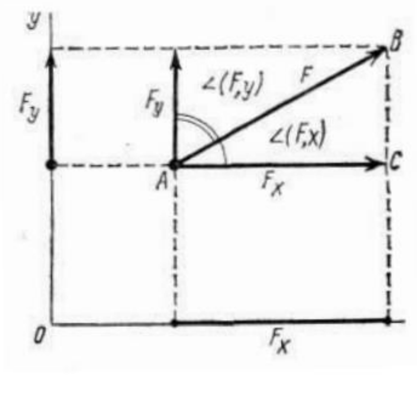


Рис.4

Лекція 5. Умови і рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил

План

1 Проекція векторної суми на ось. Аналітичне визначення рівнодіючої

2 Рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил

3 Розв'язання задач на рівноваги плоскої системи збіжних сил

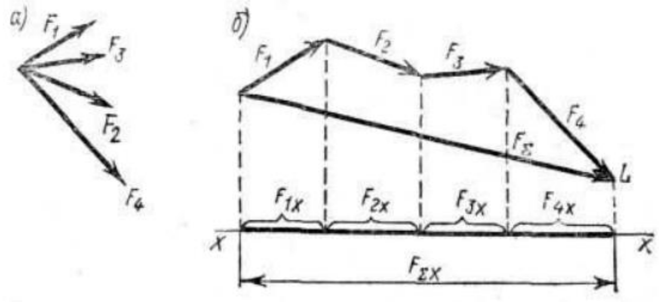


Рис.1

Пригадаємо, чому дорівнює геометрична сума збіжних сил F1,F2,F3,F4.(рис.1.): рівнодіюча, цих сил визначається як замикаюча сторона силового багатокутника.

$$\vec{F}_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4.$$

Опустимо з вершин силового багатокутника на ось x перпендикуляри. Розглядаючи отримані проекції сил безпосередньо з виконаної побудови, маємо:

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$$

$$F_{\Sigma x} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix},$$

де n - число векторів, що складаються.

Отже, **проекція векторної суми або рівнодіючої на яку-небудь ось дорівнює алгебраїчній сумі проекцій векторів, що складаються, на ту ж ось**. У площині геометричну суму сил можна проеціювати на дві координатні осі, а в просторі — відповідно на три.

Аналітичне визначення значення й напрямку рівнодіючої плоскої системи збіжних сил (метод проекцій)

У системі збіжних сил рівнодіюча може бути знайдена через проекції складових. (рис.2). Розглянемо її визначення на прикладі системи F_1, F_2, F_3 сил, зображеної на малюнку. Рівнодіюча цих збіжних сил побудована на малюнку як

$$\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Проектуючи всі сили на осі Ox і Oy і використовуючи теорему про проекцію векторної суми, одержуємо:

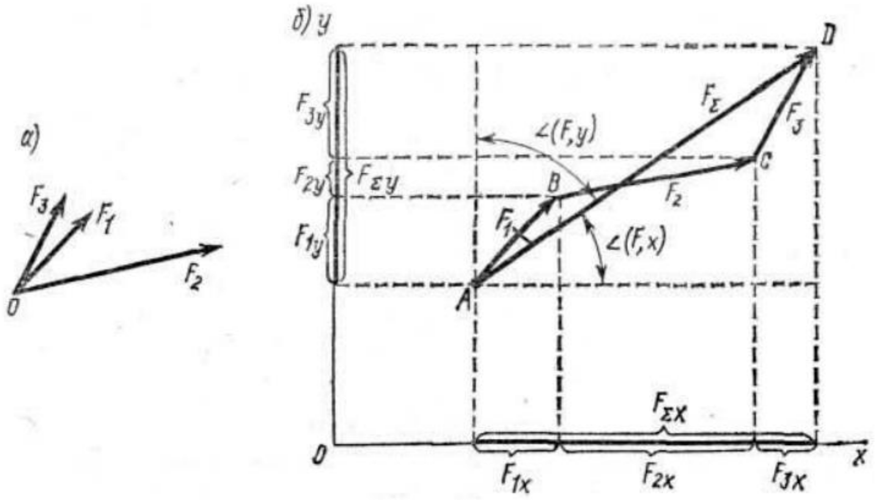


Рис.2.

Проектуючи всі сили на осі Ox і Oy й використовуючи теорему про проекцію векторної суми, одержуємо:

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = \sum_{i=1}^{n=3} F_{ix};$$

$$F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = \sum_{i=1}^{n=3} F_{iy}.$$

Чисельне значення рівнодіючої сили F_Σ через її проекції визначається по формулі

Одержуємо:

$$F_\Sigma = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}$$

$$F_\Sigma = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2}$$

2. Рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил

Збіжна система сил перебуває в рівновазі у випадку замкнутості силового багатокутника. Рівнодіюча при цьому дорівнює нулю (F_Σ = 0). Проекції рівнодіючої системи збіжних сил на координатні осі дорівнюють сумам проекцій складових сил на ті ж осі:

$$\left.\begin{aligned} F_{\Sigma x} &= \sum_{i=1}^{n} F_{1x}; \\ F_{\Sigma y} &= \sum_{i=1}^{n} F_{iy}. \end{aligned}\right|$$

Обоє доданків, що коштують під знаком кореня, у всіх випадках позитивні як величини, зведені у квадрат. Тому F_{Σ} =0 тільки при виконанні умов:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0.\end{aligned}\right\}$$

Розглянута **система збіжних сил перебуває в рівновазі, тоді, коли алгебраїчна сума проекцій її доданків на кожну із двох координатних осей дорівнюють нулю**. Ці залежності називають **рівняннями рівноваги** плоскої системи збіжних сил і використовують при аналітичному рішенні завдань.

3 Розв'язання задач на рівновагу плоскої системи збіжних сил.

Задача.

Визначити сили, що навантажують стрижні АВ і АС кронштейну. Кронштейн утримають у рівновазі вантажі F_1= 70 кН і F_2. = 100 кН (рис.3, а). Вагою частин конструкції і тертям у блоці знехтувати. Виконати перевірку графічним способом.

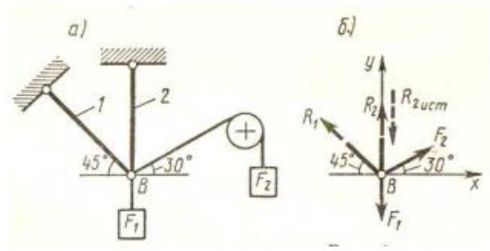


Рис.3.

Аналітичний метод.

1. Розглядаємо рівновагу точки В. До неї проложені активні сили – сили натягу тросів з вантажами F_2, і F_1. Розглядаємо точку В як вільну, відкидаємо зв'язки (стрижні 1 і 2), і замінив їх дію реакціями R_1 і R_2. Напрям реакції стрижнів невідомий, тому направляємо їх від точки В, вважаючи, що стрижні розтягнуті (рис.2, б). Якщо припущення вірне, то реакція, що визначається матиме позитивний знак, а якщо отриманий знак реакції – від'ємний, то це вказує що стрижень стиснутий і істинний напрям реакції – до точки В.

2. Обираємо традиційне положення системи координат і складаємо рівняння рівноваги:

$\Sigma F_x = 0$: - R_1cos 450 + F_2cos300 = 0;

$\Sigma F_y = 0$: R_1sin450 + R_2sin300 – F_1 = 0.

2. Із рівнянь рівноваги визначаємо, що R1 = 122 кН; R2 = - 66,6 кН.

Знак мінус перед значенням реакції R2 вказує на те, що попереднє обраний напрямок цієї реакції невірне – її слід спрямувати у протилежний бік, до шарніра В.

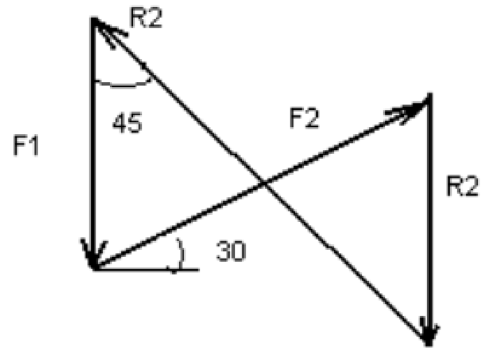
3. Перевірку правильності розв'язання задачі виконують <u>графічним способом.</u> Обираємо масштаб μ=20 кН/см. Тоді в обраному масштабі довжини вихідних сил: l_{F1} = 3,5 см; l_{F2} = 5,0 см. Використовуючи геометричну умову рівноваги, будуємо силовий багатокутник, починаючи з відомих сил, та визначаємо напрям та величину реакцій стрижнів (рис.4).

Вимірюванням довжин векторів R1 та R2 визначаємо їх величини:

$R_1 = l_{R1}\cdot\mu = 6{,}1\cdot 20 = 122$ кН;

$R_2 = l_{R2}\cdot\mu = 3{,}3\cdot 20 = 66$ кН;

Отже, значення реакцій, що визначені двома різними способами співпадають за модулем та напрямом, значить задача розв'язана вірно.



F1 + F2 +R2 + R1 = 0

Рис.4

Лекція 6. Плоска система довільно розміщених сил.

Зведення сил до даного центру

План:

1 Зведення системи сил до заданої точки

2 Теорема про момент рівнодіючої

3 Умови і рівняння рівноваги плоскої системи довільних сил

1 Зведення системи сил до заданої точки

Розглянемо випадок переносу сили в довільну крапку, що не лежить на лінії дії сили.

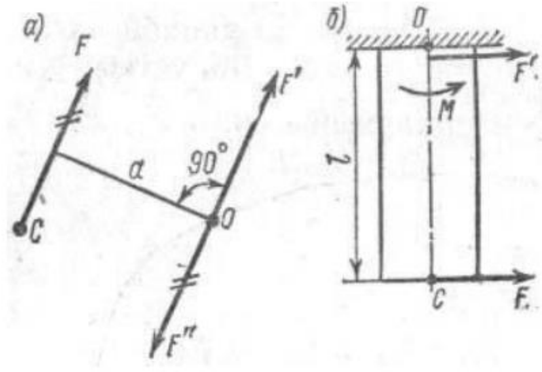


Рис.1

Візьмемо силу F, прикладену в точці C. Потрібно перенести цю силу паралельно самої собі в деяку точку O. Прикладемо у точці O дві сили F' і F'', протилежно спрямовані, рівні за значенням і паралельні заданій силі F, тобто F' = F'' = F. Від додавання в точці O цих сил стан тіла не змінюється, тому що вони взаємно врівноважуються. Отриману систему трьох сил можна розглядати як таку, що складається із сили F', прикладеної в точці O, і пари сил FF'' з моментом M = F a. Цю пару сил називають **приєднаною**, а її плече a дорівнює плечу сили F відносно точки O.

Таким чином, при **приведенні сили F до точки, що не лежить на лінії дії сили, маємо еквівалентну систему, що складається із сили, такою ж за модулем й напрямком, як і сила F, та приєднаної пари сил, момент якої дорівнює моменту даної сили відносно точки приведення**:

$$M_O(\vec{F}) = Fa.$$

Як приклад приведення сили розглянемо дію сили F на кінець затисненого стрижня (рис.1,б). Після приведення сили F у точку O затиснений перетин, виявляємо в ньому силу F1 рівну і паралельну заданій, і приєднаний момент M, який дорівнює моменту заданої сили F відносно точки приведення O,

$$M = M_O = Fl.$$

Описаний метод приведення однієї сили до даної точки можна застосувати до будь-якого числа сил. Допустимо, що в точках тіла A, B, C та D (рис.2) прикладені сили F_1,F_2,F_3,F_4.

Потрібно привести ці сили до точки O. Приведемо спочатку силу F1 , прикладену в точці A. Прикладемо в точці O дві сили F1' і F1'', паралельні їй і спрямовані в протилежні сторони. У результаті приведення сили F1 одержимо силу F1' , прикладену в точці O, і пари сил F1' F1'' із плечем a1. У в такий же спосіб поступимо і з силою F2 , прикладеної в точці B, одержимо силу F2', прикладену в точці O, і пари сил із плечем a2 і так далі з іншими силами.

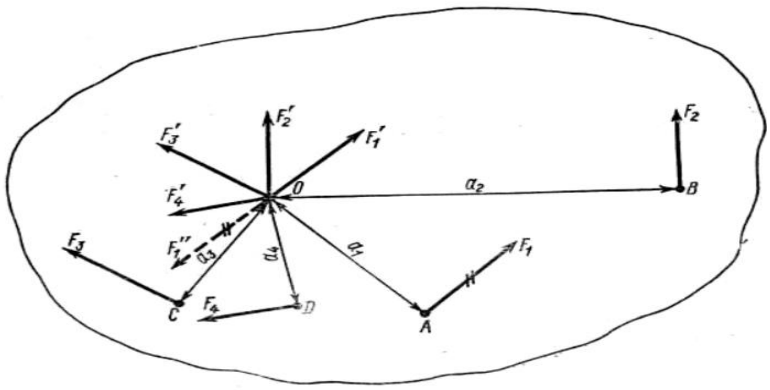


Рис.2

Плоску систему сил, прикладених у точках A, B, C и D, ми замінили збіжними силами F1,F2,F3,F4 , прикладеними в точці O, і парами сил з моментами, рівними моментам заданих сил щодо крапки O:

$$M_1 = F_1 a_1 = M_0(\vec{F}_1);\ \ M_2 = -F_2 a_2 = M_0(\vec{F}_2);$$

$$M_3 = -F_3 a_3 = M_0(\vec{F}_3);\ \ M_4 = -F_4 a_4 = M_0(\vec{F}_4).$$

Збіжні в крапці сили можна замінити однією силою F'гл, яка дорівнює геометричній сумі складових:

$$\vec{F}'_{\text{гл}} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \vec{F}'_3 + \vec{F}'_4 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$$

Цю силу, рівну геометричній сумі заданих сил, називають головним вектором системи сил і позначають F'гл .

На підставі правила додавання пар сил їх можна замінити результуючою парою, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів заданих сил щодо крапки O и називається головним моментом відносно точки зведення.

$$M_{\text{гл}} = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} M_0(\vec{F}_i).$$

Отже, **у загальному випадку плоска система сил у результаті приведення до даної точки O заміняється еквівалентною їй системою, що складається з однієї сили (головного вектора) і однієї пари (головного моменту)**.

3. Умови і рівняння рівноваги плоскої системи довільних сил.

Плоска система сил може бути приведена до головного вектора й головного моменту. Тому умови рівноваги сил на площині, як показано вище, мають вигляд:

$$F'_{гл} = 0;$$
$$M_{гл} = \sum_{i=1} M_0(F_i) = 0$$

Отже, **для рівноваги системи сил, довільно розташованих у площині, необхідно й достатньо, щоб головний вектор і головний момент цих сил відносно будь-якого центра дорівнювали нулю.**

Головний вектор F'гл являє собою геометричну суму всіх сил, що становлять систему перенесених у центр приведення. Модуль головного вектора можна визначити через проекції на координатні осі всіх сил системи.

Застосувавши для сум проекцій всіх сил на осі x и в позначення $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} u \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$

одержимо для значення головного вектора вираз:

$$F'_{гл} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2} = 0.$$

Головний вектор дорівнює нулю, якщо обоє доданків під коренем дорівнюють нулю, тобто

Крім того, для $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0.$ рівноваги необхідно, щоб головний момент також дорівнював нулю, тобто, $\sum_{i=1}^{n} M_{гл}(F_i) = 0$

Надалі для спрощення запису рівнянь рівноваги при рішенні завдань будемо опускати індекси з сум.

Рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил можуть бути представлені в трьох формах. Перша (основна форма цих рівнянь) виведена вище:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum M_O = 0.$$

Три рівняння рівноваги для плоскої системи сил відповідає трьом можливим ступеням рухливості тіла в площині - двом переміщенням уздовж осей x і y та обертанню навколо довільної точки площини.

При рішенні багатьох завдань раціональніше користуватися іншими формами рівнянь рівноваги. Так, як при рівновазі твердого тіла сума моментів всіх прикладених до нього сил відносно будь-якої точки дорівнює нулю, то можна, вибравши три довільні точки А, В, С и дорівнявши нулю суму моментів щодо кожної з них, одержати три наступні рівняння рівноваги:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_G = 0.$$

Це друга форма рівнянь рівноваги. Точки А, В, С не повинні лежати на одній прямій.

Третя форма рівнянь рівноваги являє собою рівність нулю сум моментів відносно двох довільних крапок А и В і рівність нулю суми проекцій на деяку ось х:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum F_{ix} = 0.$$

При користуванні цією формою рівнянь рівноваги необхідно, щоб ось х не була перпендикулярна лінії, що з'єднує точки А и В.

Лекція 7. Умови і рівняння рівноваги плоскої системи довільних сил

План:

1Типи опор балочних систем

2 Розв’язання задач

1Типи опор балочних систем

Дуже часто в машинах і конструкціях зустрічаються тіла подовженої форми, що називають балками (або балочними системами). Балки в основному призначені для сприйняття поперечних навантажень. Балки мають спеціальні опорні пристрої для сполучення їх з іншими елементами й передачі на них зусиль. Застосовуються наступні види опор:

Шарнірно - рухома опора

Така опора допускає поворот навколо осі шарніра й лінійне переміщення паралельно опорної площини. У цій опорі відома точка прикладення опорної реакції — центр шарніра і її напрямок — перпендикуляр до опорної площини. Тут залишається невідомим числове значення опорної реакції RA.

Умовне зображення опори показане на рис 1.а.

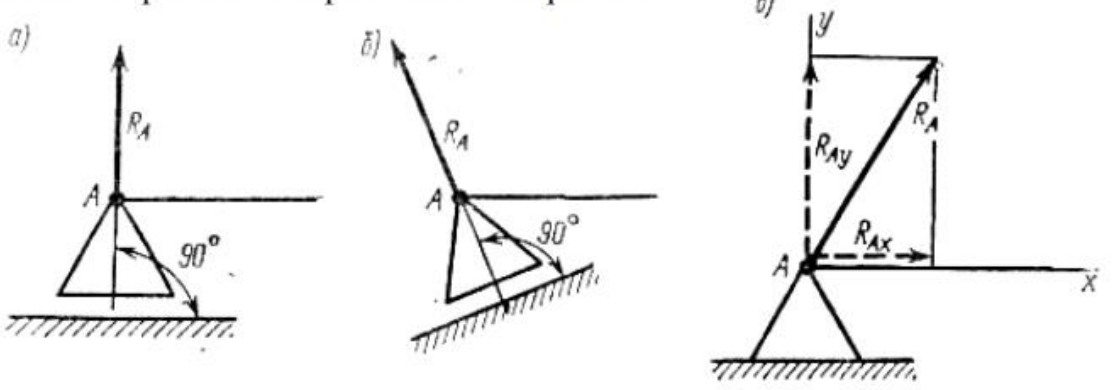


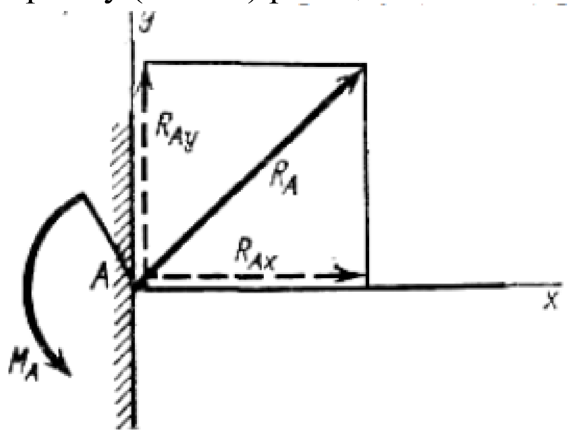
Рис.1

Слід зазначити, що опорна поверхня шарнірно-рухливої опори може бути непаралельна осі балки (рис.1,б). Реакція RA у цьому випадку не буде перпендикулярна осі балки, тому що вона перпендикулярна опорної поверхні.

Шарнірно - нерухома опора

Ця опора допускає поворот навколо осі шарніра, але не допускає ніяких лінійних переміщень. У цьому випадку відома тільки точка прикладення опорної реакції — центр шарніра; напрям і значення опорної реакції невідомі. Зазвичай, замість визначення значення й напрямку (повної) реакції R_A знаходять її складові R_{Ax} і R_{Ay}.

Жорстке затиснення (защемлення)



Така опора не допускає ні лінійних переміщень, ні повороту. Невідомими в цьому випадку є не тільки значення й напрямок реакції, але й точка її прикладення. Тому жорстке затиснення заміняють силою реакції RA і парою сил з моментом МА.

Для визначення опорної реакції варто знайти три невідомих: складові RAx і RAy опорні реакції по осях координат і реактивний момент МА.

Алгоритм розв’язання задач на рівновагу плоскої системи довільних сил:

1 Звільнити балку від в'язів, замінив їх відповідними реакціями.

2 Обрати систему координатних осей X і У.

3 Силу F замінити її складовими Fx і Fy; Рівномірно-розташоване навантаження замінити відповідної рівнодіючою Q.

4 Скласти три рівняння рівноваги і визначити з них реакції опор балки.

5 Для перевірки скласти рівняння рівноваги, що не було використано при розв'язання задачі

Задача . Визначити опорні реакції двохопорної балки (рис.3, а)

1. Обираємо систему координатних осей X і У.

2. Силу F заміняємо її складовими $Fx = F\cos\alpha$, $Fy = F\sin\alpha$. Рівнодіюча Q =q CD рівномірно розташованого навантаження прикладена у середині відрізку CD.

3. Звільняємо балку від опор, замінив їх реакціями (рис..3, б,в)

4. Складаємо рівняння рівноваги і визначаємо невідомі реакції:

$\Sigma MA = 0$: - FyAB – M – QAK + RD = 0;

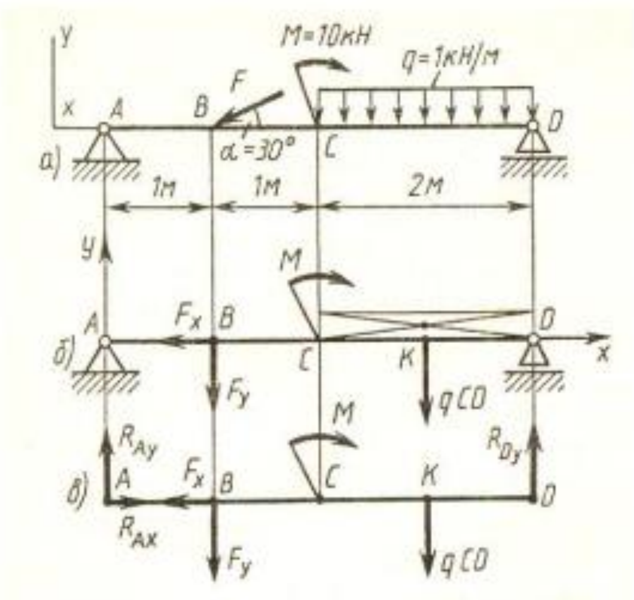


Рис.3.

З цього рівняння визначаємо реакцію RD= 6,5кН.

$\Sigma MD = 0$: FyBD – M + QKD - RAyAD = 0;

з цього рівняння визначаємо реакцію RAy = 5,5 кН.

$\Sigma Fx = 0$: RAx - Fx = 0; RAx = Fx = 17,3 кН.

4. Перевірку правильності рішення підтверджує таке рівняння:

$\Sigma Fy = 0$: RAy - Fy – Q + RD = 0.

5,5 – 10 – 2 + 6,5 = 0.

Умова рівноваги виконується, значить задача розв'язана вірно.

Лекція 8

Практичне заняття №1

Тема заняття: Визначення опорний реакцій балок.

Цілі заняття: Набуття практичних навиків і умінь по визначенню опорних реакцій балок.

Послідовність розв'язування задачі

1.Відобразити балку разом з загрузками;

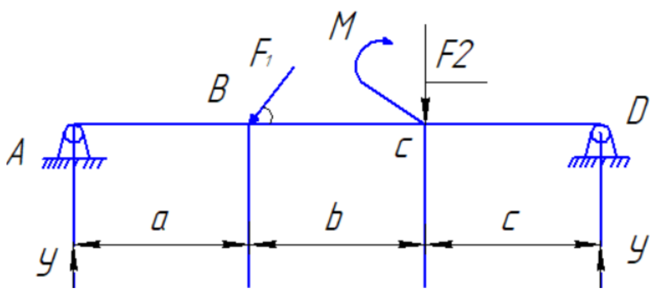
2.Вибрати положення координатних осей, щоб вісь Х співпала з балкою, а вісь У направити перпендикулярно осі Х.

3.Звільнити балку від опор, замінивши їх дію реакціями опор, направлених вздовж вибраних осей координат.

4.Скласти рівняння рівноваги статики для довільної плоскої системи сил таким чином і в такій послідовності, щоб розв'язанням кожного з цих рівнянь було визначення однієї з невідомих реакцій опор.

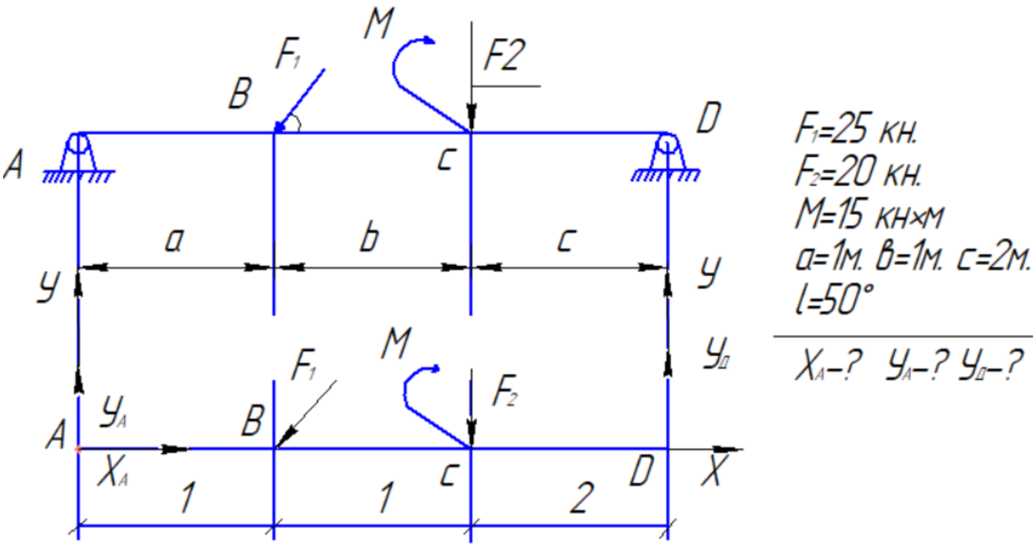
5.Перевірити правильність знайдених опорних реакцій по рівнянню, яке не було використане для рішення задачі.

Задача. Визначити опорні реакції балки.



Шифр	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F_1(кн)	10	20	30	40	50	40	30	20	10	5	10	15	25	35	45	55	40	30	20	10
М(кн·м)	5	10	15	20	15	10	5	15	50	55	45	50	40	35	30	25	20	15	10	5
F_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	5	6	8	15	16	17	18
а(м)	1	0,5	1	0,5	1	1	0,5	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	1	0,5	0,5	0,5	0,5	1
в(м)	1	1	0,5	0,5	1	0,5	1	0,5	1	1	1	1	1	0,5	1	0,5	0,5	0,5	1	0,5
с(*м*)	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2
d^0	15	30	45	60	75	90	120	150	90	15	30	45	75	105	120	150	140	15	25	30

Задача. Визначити опорні реакції балки.



Розв’язок.

1.Відобразити балку разом з навантаженнями.

2.Проводимо координатні осі, звільняємо від опор і заміняємо їх дію опорними реакціями.

3.Складаємо рівняння рівноваги і визначаємо невідомі реакції опор.

$\sum X_i = 0. \quad X_A - F_1 cos\mathcal{L} = 0$ (1)

$\sum Y_i = 0. \quad Y_A - F_1 sin\mathcal{L} - F_2 + У_Д = 0$ (2)

$\sum M_A = 0. \quad F_1 \cdot\ sin\mathcal{L} \cdot a - M - F_2 \cdot (a+b) + У_Д \cdot (a+b+c) = 0$ (3)

З рівняння (3)визгачаємо $У_Д$.

$$У_Д = \frac{F_1 \cdot\ sin\mathcal{L} \cdot a + M + F_2 \cdot (a+b)}{a+b+c} = \frac{25 \cdot 0{,}766 \cdot 1 + 15 + 20 \cdot 2}{4} = 18{,}5(\text{кн})$$

Підставиши значення $У_Д$ в рівняння (2) одержимо

$$Y_A = F_1 sin\mathcal{L} + F_2 - У_Д = 25 \cdot 0{,}766 + 20 - 18{,}5 = 20{,}6(\text{кн})$$

З (1) рівняння $X_A = F_1 \cdot\ cos\mathcal{L} = 25 \cdot 0{,}643 = 16{,}1(\text{кн})$

Якщо будь-яка реакція отримана зі знаком (-), то її напрямком необхідно поміняти на протилежний.

Перевірка

Примінимо раніше не вживані рівняння

$\sum M_Д = 0. \quad -Y_A \cdot (a+b+c) + F_1 \cdot\ sin\mathcal{L}(b+c) -\ M + F_2 \cdot c = 0.$

Підставляєм значення. -20,6·4+25·0,766·3-15+20·2=0

0=0

Рівність нулю говорить про те, що реакції знайдено вірно.

Запишемо відповідь і зробимо висновок.

$$-F_1 \cdot sin\mathcal{L} \cdot a - M - F_2(a+b) + У_Д(a+b+c) = 0.$$

$$У_Д = \frac{F_1 \cdot sin\mathcal{L} \cdot a + M + F_2 \cdot (a+b)}{a+b+c} = \frac{25 \cdot 0{,}766 \cdot 1 + 15 + 20 \cdot 2}{4} = 18{,}5(кн)$$

Y_A=25·0,766+20-18,5=20,6(кн.)

$$X_A = 25 \cdot 0{,}643 = 16{,}1(кн)$$

Перевірка:

$$-Y_A \cdot (a+b+c) + F_1 \cdot sin\mathcal{L} \cdot 3 + F_2 \cdot 2 - M = 0$$

$$-82{,}4 + 57{,}5 + 40 - 15 = 0$$

0=0. Реакції визначено вірно

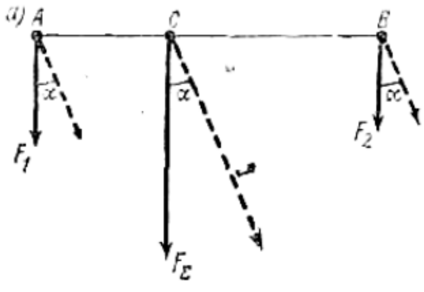
Лекція 9. Центр ваги плаской складної фігури

План:

1. Центр паралельних сил і його координати
2. Центр ваги тіла. Методи знаходження центра ваги
3. Полярний і осьовий моменти інерції
4. Експериментальні методи визначення центру ваги фігури, тіла

1 Центр паралельних сил і його координати

Встановимо одну важливу властивість точки прикладення рівнодіючої двох паралельних сил.



Нехай у точках A и B на тіло діють паралельні сили F1 і F2 (рис..1). Рівнодіюча цих сил дорівнює їхній сумі, паралельна їм, спрямована в ту ж сторону, а її лінія дії ділить пряму A B на частині, обернено пропорційним цим силам, тобто

$$AC / BC = F_2 / F_1$$

Повернемо сили F1 і F2 на довільний кут α, тобто змінимо їхній напрямок, зберігши паралельність. При цьому рівнодіюча залишиться рівній їхній сумі, паралельної їм, спрямованої в ту ж сторону, а лінія її дії знову поділить пряму АВ на частині, обернено пропорційним величинам заданих сил. На рис.,а точкою С позначене перетинання лінії дії рівнодіючої з лінією АВ. Ця точка зветься **центром паралельних сил**, і її положення не залежить від напрямку сил, що складаються.

Положення (координати) центра просторової системи паралельних сил визначають по формулах:

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}; y_c = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}; z_c = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}$$

2. Центр ваги тіла. Методи знаходження центра ваги

Знаходження центра ваги є важливим завданням розробки будь-якого механічного пристрою, особливо в аерокосмічних галузях, кораблебудуванні й точному приладобудуванні.

Виходячи з отриманих загальних положень, можна вказати конкретні методи знаходження центра ваги. Деякі з них ми розглянемо нижче.

2.1 Метод симетрії.

1. Якщо тіло має площина симетрії, то центр ваги тіла лежить у цій площині.

2. Якщо тіло має вісь симетрії, то центр ваги тіла перебуває на цій осі.

3. Якщо тіло має центр симетрії, то центр ваги тіла перебуває в цій крапці. Використовуючи правила, визначимо положення центра ваги однорідного циліндра висотою Н

2.2 Метод розбивання (розчленування).

Він застосовується, коли однорідне тіло можна розбити на частини, положення центрів ваги яких відомі або легко визначаються. У неоднорідному тілі ці частини повинні мати ще й однакову питому вагу у всіх їхніх крапках. Після розбивки положення центра ваги всього тіла знаходять, використовуючи дискретні формули для визначення координат центра ваги.

2.3 Методи негативних ваг, об'ємів і площ.

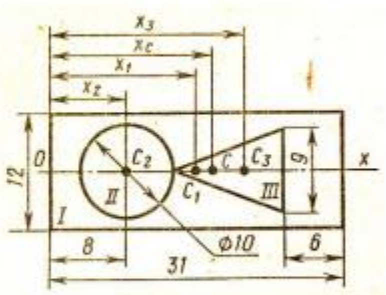
Ці методи є окремими випадками методу розбивання і застосовуються для тіл з порожнинами (отвору, вирізи й т.д.).

Аналіз результату показує, що центр ваги С диска з отвором зміщений від отвору убік важкої частини плоскої фігури.

2.4 Експериментальні методи

Якщо тіло має неправильну форму або якщо воно неоднорідно (наприклад, у ньому є порожнечі), то розрахунок положення центра ваги часто скрутне й це положення зручніше знайти за допомогою **методу підвішування**.

Задача . Для заданої плоскої фігури (тонкої однорідної пластини) визначити положення центру ваги. Розміри на кресленні дані у сантиметрах. Перевірку зробити методом підвішування.



1. Дану складову фігуру уявимо як таку, що складається з трьох простих: I - прямокутник; II – коло; III – трикутник. Площі кола і трикутника вважаємо від'ємними, а площу прямокутника - без врахування отворів, що він містить.

2. Площі простих фігур: A1 = 21·31 = 372 см2 ; A2 =- πd2 /4 =- 3,14·102 /4 = -78,5 см2 ; A3 = - 12·9/2 = - 54 см2 .

3. Фігура має ось симетрії, а значить її центр ваги буде лежати на цій осі. Суміщаємо координатну ось X з віссю симетрії, а початок координат – з лівим краєм фігури.

4. Координати центру ваги простих фігур: x1 = 31/2 =15,5 см; x2 = 8 см; X3 = 31 – 6 - 12/3 = 21 см, де 12/3 – відстань від центра ваги трикутника до його основи, що дорівнює 1/3 від його висоти.

5. Координати центру ваги заданої фігури:

$$Xc = \frac{A_1x_1 + A_2X_2 + A_3X_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{372 \cdot 15{,}5 - 78{,}5 \cdot 8 - 54 \cdot 21}{372 - 78{,}5 - 54} = 16{,}6 \text{ см.}$$

Лекція № 10 Кінематика. Основні поняття кінематики

План:

1. Вступ до кінематики. Основні поняття і визначення

2. Способи задавання руху точки

3. Швидкість точки

1. Вступ до кінематики. Основні поняття і визначення

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, який вивчає рух тіл без урахування причин, що викликали цей рух.

Основною задачею кінематики є встановлення завдання руху точок (тіл) і методів визначення кінематичних величин, які характеризують цей рух.

<u>Рух тіл відбувається в просторі і часі.</u> Простір у класичній механіці вважається евклідовим, тобто таким, що не залежить від часу і від характеристик руху тіл у цьому просторі.

Проміжок часу – це перебіг часу між двома фізичними явищами.

Момент часу – це границя між двома суміжними проміжками часу.

Початковий момент часу – момент, з якого починається відлік.

В курсі теоретичної механіки кінематика ділиться на кінематику точки і кінематику твердого тіла.

Рух тіла може бути виміряний тільки відносно інших тіл. Тіло, відносно якого вимірюється рух і яке умовно вважається нерухомим, називається тілом відліку.

Система відліку – це система координат, що незмінно пов’язана з тілом відліку, і годинник.

Рух тіла вважається кінематично визначеним, якщо відоме положення тіла і його точок (координати) у будь-який момент часу.

Рух тіла визначається рівняннями, в яких координати точок є функціями часу. Ці рівняння називаються законами руху.

Сукупність (послідовність) положень точки в просторі – це **траєкторія руху**.

Якщо траєкторія точки є прямою лінією, то рух називається прямолінійним, якщо траєкторія є кривою – то криволінійним. Основними кінематичними характеристиками руху точки є її *положення, швидкість і прискорення*.

2. Способи задавання руху точки

Знання законів руху тіла означає знання законів руху кожної його точки, тому вивчення кінематики ґрунтується на вивченні геометрії руху точки.

Траєкторією точки називається безліч (геометричне місце) положень рухається точки в даній системі відліку. Простіше кажучи, траєкторія руху - це лінія, яку описує рухома точка щодо обраної системи відліку. Залежно від форми траєкторії розрізняють прямолінійний і криволінійний рух.

Рух будь-якої точки тіла можна описати (задати) трьома способами - природним, векторних і координатним

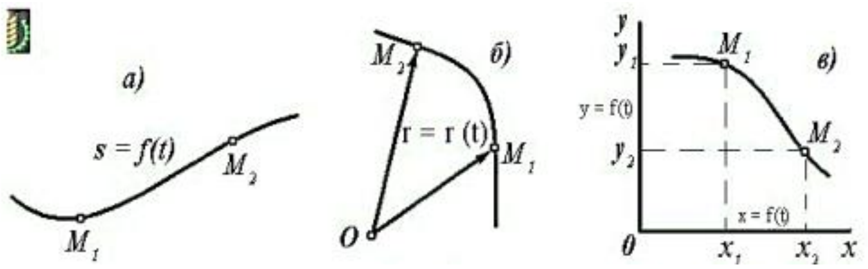


Рисунок 1 - Способи задавання руху точки

Природний спосіб (рис. 1а) полягає в тому, що рух точки задається її траєкторією, початком відліку і рівнянням руху по цій траєкторії (законом руху).

У загальному вигляді рівняння руху записується так: s = f (t), де s - відстань від точки до початкового положення (початку відліку), що є функцією часу; t - час руху точки від початкового відліку.

Векторний спосіб (рис. 1б) ґрунтується на тому, що положення точки в просторі однозначно визначається радіусом-вектором r, проведеним з деякого нерухомого центру до даного пункту. При цьому положення точки в даний момент часу визначається напрямом і модулем вектора. Математично функція зміни радіуса-вектора від часу записується так:

$$r = rf(t)$$

Координатний спосіб (рис. 1в) полягає в тому, що рух точки задається рухом її проекцій уздовж осей координат. У загальному вигляді рівняння руху точки можна записати в такий спосіб:

$$x = f\ (t),\ y = f1\ (t),\ z = f2\ (t).$$

3.Швидкість точки

Швидкість - це кінематична міра руху точки, що характеризує швидкість зміни її положення в просторі.

Швидкість є векторною величиною, тобто вона характеризується не тільки модулем (скалярної складової), а й напрямком в просторі.

Як відомо з фізики, при рівномірному русі швидкість може бути визначена довжиною шляху, пройденого за одиницю часу: $v = s / t = const$ (передбачається, що початок відліку шляху і часу збігаються).

При прямолінійному русі швидкість постійна і по модулю, і по напрямку, а її вектор збігається з траєкторією.

Одиниця швидкості в системі СІ визначається співвідношенням довжина / час, тобто м / с.

Очевидно, що при криволінійному русі швидкість точки буде змінюватися у напрямку.

Для того, щоб встановити напрям вектора швидкості в кожен момент часу при криволінійному русі, розіб'ємо траєкторію на нескінченно малі ділянки шляху, які можна вважати (внаслідок їх малості) прямолінійними. Тоді на кожній дільниці умовна швидкість vn такого прямолінійного руху буде направлена по хорді, а хорда, в свою чергу, при нескінченному зменшенні довжини дуги (Δs прагне до нуля), збігатиметься з дотичній до цієї дузі.

З цього випливає, що при криволінійному русі вектор швидкості в кожен момент часу збігається з дотичною до траєкторії (рис. 2а). Прямолінійний рух можна уявити, як окремий випадок криволінійного руху по дузі, радіус якої прагне до нескінченності (траєкторія збігається з дотичною).

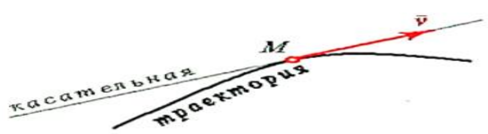


Рисунок 2 – Швидкість точки при криволінійному русі

При нерівномірному русі точки модуль її швидкості з плином часу змінюється.

Уявімо собі точку, рух якої задано природним способом рівнянням

$$s = f(t).$$

Якщо за невеликий проміжок часу Δt точка пройшла шлях Δs, то її середня швидкість дорівнює:

$$v_{cp} = \Delta s/\Delta t.$$

Середня швидкість не дає уявлення про справжню швидкості в кожен даний момент часу (справжню швидкість інакше називають миттєвою). Очевидно, що чим менше проміжок часу, за який визначається середня швидкість, тим ближче її значення буде до миттєвої швидкості.

Справжня (миттєва) швидкість є межа, до якої прагне середня швидкість при Δt, яка прагне до нуля:

$$v = \lim vcp \text{ при } t \to 0 \text{ або } v = \lim (\Delta s/\Delta t) = ds/dt.$$

Таким чином, числове значення істинної швидкості одно $v = ds / dt$.

Справжня (миттєва) швидкість при будь-якому русі точки дорівнює першої похідної координати (тобто. відстані від початку відліку переміщення) за часом.

При Δt прагне до нуля, Δs теж прагне до нуля, і, як ми вже з'ясували, вектор швидкості буде направлений по дотичній (тобто збігається з вектором істинної швидкості v). З цього випливає, що межа вектора умовної швидкості vn, рівний межі відносини вектора переміщення точки до нескінченно малому проміжку часу, дорівнює вектору істинної швидкості точки.

Лекція № 11 Простий рух твердого тіла

План:

1. Поступальний рух
2. Обертання навколо нерухомої осі
3. Різні випадки обертального руху

Розрізняють два види найпростішого руху твердого тіла: поступальний рух і обертання навколо нерухомої осі.

Рух тіла, при якому будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається паралельною свого початкового стану, називається поступальним.

Так, наприклад, поршень двигуна щодо інших деталей і вузлів (гільзи, блоку, головки циліндрів і т. п.) Робить поступальний рух.

Закономірності переміщення всіх точок тіла при поступальному русі можна описати рухом будь-якої з його точок.

Теорема: при поступальному русі всі точки твердого тіла мають однакові траєкторії, швидкості і прискорення.

Таким чином, поступальний рух твердого тіла цілком визначається рухом однієї з його точок і, отже, всі формули кінематики точки застосовні для тіла, що рухається поступально.

2. Обертання навколо нерухомої осі

Рух, при якому принаймні дві точки твердого тіла або незмінної системи залишаються нерухомими, називається обертальним; пряма лінія, що з'єднує ці дві точки, називається віссю обертання.

У визначенні обертального руху говориться про незмінної системі, тому що вісь обертання може лежати і поза тілом.

Обертальний рух в техніці зустрічається дуже часто. У багатьох машинах є ланки, які вчиняють обертальний рух, наприклад, вали, шківи, зубчасті колеса, маточини і т. п.

Слід зазначити, що поняття обертального руху може ставитися лише до тіла, але не до окремої точці, і, наприклад, рух точки по колу є не обертальним, а криволінійним рухом.

Розглянемо диск, що обертається навколо осі, перпендикулярної площині креслення (див. рис. 2). Точка O - слід цієї осі.

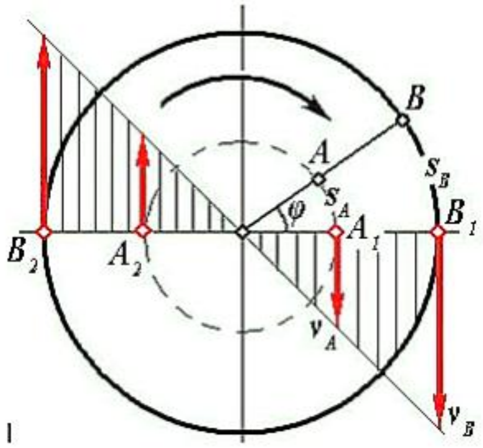


Рисунок 2.

Очевидно, що траєкторії точок обертового тіла є окружності різних радіусів, розташовані в площинах, перпендикулярних осі обертання, з центрами, що лежать на цій осі.

Обертальний рух тіла можна характеризувати кутом φ, на який повернувся тіло за даний проміжок часу. Цей кут називається кутовим переміщенням тіла.

Кутове переміщення тіла виражається в радіанах (рад) або оборотах (про); в останньому випадку кутове переміщення позначають N. Для встановлення залежності між цими величинами складемо пропорцію:

$1\ об = 2\pi$ рад, $N\ об = \varphi$ рад, звідки $\varphi = 2\pi N$ рад,

де N - число обертів тіла.

Кутове переміщення є функція часу, отже, закон обертального руху в загальному вигляді можна записати так: $\varphi = f(t)$.

З рис. 2 видно, що шлях будь-якої точки тіла, що обертається може бути визначений з рівняння:

$s = r\varphi$, де r - відстань від точки до осі обертання.

Швидкість будь-якої точки тіла визначається так:

$v = ds / dt = d(r\varphi) / dt = r(d\varphi / dt)$

(R винесли за знак похідної, так як для даної точки твердого тіла ця величина постійна).

Вираз $d\varphi / dt$ називається кутовою швидкістю і позначається ω.

Кутова швидкість є кінематична міра руху тіла, що обертається, що характеризує швидкість його кутового переміщення: $\omega = d\varphi / dt$.

Кутова швидкість дорівнює першій похідній кутового переміщення за часом. Одиниця кутової швидкості - радіан в секунду (рад / с).

Формула для визначення швидкості будь-якої точки тіла, що обертається має наступний вигляд: $v = \omega r$.

Швидкість точки в кожен момент часу прямо пропорційна її відстані від осі обертання, отже, графік швидкостей точок, наприклад, діаметра B1B2, буде являти собою два трикутника. Очевидно, що вектор швидкості точки обертового тіла спрямований перпендикулярно радіусу, що з'єднує цю точку з віссю обертання.

Якщо точка лежить на поверхні тіла, що обертається, то її швидкість називають окружний.

У техніці часто швидкість обертання висловлюють в оборотах на хвилину, позначають буквою n і називають частотою обертання. Залежність між кутовою швидкістю і частотою обертання виглядає так:

$\omega = \pi n / 30$ рад / с, де n = частота обертання тіла (об / хв).

3. Різні випадки обертального руху

Рівномірний обертальний рух

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі з постійною кутовою швидкістю, то рух називається **рівномірним**.

При цьому: $\omega = const; \varphi = \omega t$.

Дотичне, нормальне і повне прискорення будь-якої точки рівномірно обертового тіла визначають так: $a\tau = 0; an = \omega 2 r; a = an = \omega 2 r$.

Нерівномірний обертальний рух

Якщо кутова швидкість тіла, що обертається з плином часу змінюється, то рух називається **нерівномірним**.

У найзагальнішому вигляді формули нерівномірного обертального руху виглядають так: $\varphi = f(t); \omega = \Delta\varphi / \Delta t$.

Дотичне рух будь-якої точки нерівномірно тіла, що обертається визначають наступним чином: $a\tau = dv / dt = d\ (\omega r) / dt = r\ (d\omega / dt)$.

Вираз $d\omega / dt$ позначають α (альфа) і називають кутовим прискоренням.

Кутове прискорення є кінематична міра зміни кутової швидкості тіла, що обертається: $\alpha = d\omega / t = d2\ \varphi / dt2$.

Кутове прискорення дорівнює першій похідній кутової швидкості або другій похідній кутового переміщення за часом. Одиниця кутового прискорення - радіан на секунду в квадраті (рад / с2).

Формулу для визначення дотичного прискорення будь-якої точки нерівномірно тіла, що обертається можна записати в такому вигляді: $a\tau = \alpha r$.

Нормальне прискорення визначається за такою самою формулою, як і в разі рівномірного обертання: $an = \omega\ 2\ r$.

Повне прискорення:

$a = \sqrt{}\ [(a\tau\ 2\ ) + (an\ 2\ )] = \sqrt{}\ [(\alpha r)\ 2 + (\omega 2\ r)\ 2\ ]$, звідки $a = r \sqrt{}\ (\alpha 2 + \omega 4\ )$.

Направляючий тангенс повного прискорення можна визначити так:

$tg\ (a, an) = a\tau / an = \alpha r / (\omega 2\ r)$, звідки $tg\ (a, an) = \alpha / \omega 2$.

Якщо напрямок кутового прискорення збігається з напрямком обертання, то обертальний рух є прискореним, і навпаки.

Лекція № 12 Динаміка. Основні поняття і аксіоми динаміки

План:

1. Предмет динаміки.
2. Основні поняття і визначення
3. Основне рівняння динаміки та аксіоми

1. Предмет динаміки.

Динаміка — це розділ механіки, який вивчає причини зміни швидкості руху тіл під впливом інших тіл.

2. Основні поняття і визначення

Вивчення динаміки починається з вивчення руху найпростішого об'єкта – матеріальної точки.

Матеріальною точкою, як нам відомо, називається таке матеріальне тіло, розмірами якого можна знехтувати в умовах даної задачі. Нагадаємо, що за матеріальну точку ми можемо прийняти не тільки тіло зникаюче малих розмірів, але іноді і тіло скінчених розмірів (і, може бути, значних і дуже великих розмірів), якщо тільки в умовах даних досліджень ці розміри не мають значення.

Абсолютно тверде тіло можна також розглядати як систему матеріальних точок, відстані між якими не змінюються ні при яких обставинах, тобто як незмінну систему.

Розділи динаміки

1. Динаміка матеріальної точки

Матеріальна точка – тіло, яке має масу, але розмірами якого можна знехтувати.

2.Динаміка механічної системи

Механічна система – сукупність матеріальних точок, рух і положення яких взаємопов’язані.

3. Динаміка твердого тіла

Абсолютно тверде тіло – система матеріальних точок, відстань між якими є незмінною, і які безперервно заповнюють деяку частину простору.

Встановлення основних законів динаміки було започатковано італійським вченим Галілеєм і продовжено Ньютоном

Перший закон Ньютона (перший закон динаміки)

Перший закон динаміки, званий аксіомою інерції, формулюється в застосуванні до матеріальної точці так: ізольована матеріальна точка або знаходиться в спокої, або рухається прямолінійно і рівномірно.

У кінематиці було встановлено, що прямолінійний рівномірний рух є єдиним видом руху, при якому прискорення дорівнює нулю, тому аксіому інерції можна сформулювати наступним чином: прискорення ізольованою матеріальної точки дорівнює нулю.

Отже, ізольована від впливу навколишніх тіл матеріальна точка не може сама собі повідомити прискорення. Це властивість тіл називають інерцією або інертністю, тобто **інертність (інерція)** - властивість тіл зберігати швидкість по модулю і напрямку (в т. Ч. І спокій - стан, при якому швидкість дорівнює нулю). Змінити швидкість, тобто повідомити матеріальної точки прискорення здатна тільки прикладена до неї сила.

Другий закон Ньютона (другий закон динаміки)

Залежність між силою і повідомляються нею прискоренням встановлює другий закон Ньютона, який говорить, що прискорення, що повідомляється матеріальної точки силою, має напрямок сили і пропорційно її модулю.

Якщо сила F_1 повідомляє матеріальної точки прискорення а1, а сила F_2 повідомляє цій же точці прискорення а2, то на підставі другого закону Ньютона можна записати: $F_1 / F_2 = a_1 / a_2$ *або* $F_1 / a_1 = F_2 / a_2$.

Отже, для даної матеріальної точки відношення будь-якої сили до викликається нею прискоренню є величина постійна. Цю величину (відношення сили до прискорення) називають масою матеріальної точки, і позначають її m: $F / a = m = const.$

На підставі цієї рівності можна зробити висновки:

- дві матеріальні точки, що мають однакові маси, отримають від однієї і тієї ж сили однакові прискорення;

- чим більше маса точки, тим більшу силу необхідно прикласти, щоб надати цій точці необхідну прискорення.

Маса - одна з основних характеристик будь-якого матеріального об'єкта, що визначає його інертні і гравітаційні властивості. Ньютон називав масою кількість матерії, яка є в тілі, вважаючи масу кожного тіла величиною постійною.

Теорія відносності встановлює наступну залежність між масою тіла, що знаходиться в спокої, і масою тіла, що рухається: $m = m_0 / \sqrt{(1 - v2 / c2)}$,

де m - маса тіла, що рухається, m_0 - маса покоїться тіла (маса спокою), v - швидкість руху тіла, c - швидкість світла.

З цієї формули видно, що чим більше швидкість руху тіла, тим більше його маса і, отже, тим важче повідомити йому подальше прискорення.
На підставі теорії відносності сучасна наука дає масі таке визначення: маса є міра інертності тіла.

Другий закон Ньютона виражається рівністю: $F = ma$, яке називається основним рівнянням динаміки і читається так: сила є вектор, що дорівнює добутку маси точки на її прискорення.

Основне рівняння динаміки є рівнянням руху матеріальної точки у векторній формі.

Прискорення вільного падіння

Дослідним шляхом встановлено, що під дією тяжіння Землі в вакуумі тіла падають з однаковим прискоренням, яке називається прискоренням вільного падіння.

Слід зазначити, що це явище буде вірним для конкретного географічного місця на поверхні планети або над її поверхнею - прискорення вільного падіння не є постійною величиною і залежить, зокрема, від відстані між центром ваги тіла і центром тяжіння нашої планети, а також від існування відцентрової сили інерції, що викликається обертанням Землі.

Так, на полюсах прискорення вільного падіння $g \approx 9{,}83\ м / c^2$, а на екваторі $g \approx 9{,}78\ м / c^2$. Але в наближених розрахунках приймають середнє значення, рівне приблизно $g \approx 9{,}81\ м / с^2$, при цьому похибки результатів незначні.

Отже, сила тяжіння тіла дорівнює його масі, помноженої на прискорення вільного падіння. Якщо сила тяжіння одного тіла $G_1 = m_1 / g$, а другого тіла - $G_2 = m2 / g$, то $G1 / G2 = (m_1 g) / (m_2 g) = m_1 / m_2$,

тобто. сили тяжіння тіл пропорційні їх масам, що дозволяє порівнювати маси різних тіл шляхом зважування (порівнювання їх сил тяжіння за допомогою ваг).

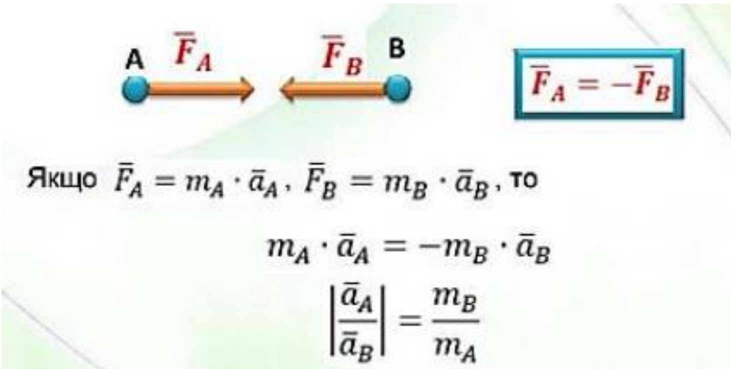
Рух під дією постійної сили може бути і прямолінійним і криволінійним (в останньому випадку матеріальна точка має початкову швидкість, вектор якої не збігається з вектором сили). Приклад руху під дією постійної сили - вільне падіння тіл.

Третій закон Ньютона

До основних законів динаміки відноситься і розглянута в статиці аксіома взаємодії, або третій закон Ньютона.

Стосовно до матеріальної точці закон формулюється так: сили взаємодії двох матеріальних точок по модулю рівні між собою і спрямовані в протилежні сторони (дія дорівнює протидії).

На підставі цього закону можна зробити висновок, що сила, як міра взаємодії між тілами, не може проявлятися без пари, тобто якщо виникає якесь силове вплив, то існує і "двійник" цього силового впливу, рівний по модулю і протилежний по вектору.



Лекція № 13. Загальні теореми динаміки матеріальної точки

План:

1. Основні теореми динаміки як методи дослідження механічного руху
2. Кількість руху і імпульс сили
3. Механічна енергія та її види
4. Розв’язування задачі

1. Основні теореми динаміки як методи дослідження механічного руху

Існує багато задач динаміки, розв’язання яких не потребує повної інформації про всі властивості досліджуваного руху системи, які містяться у диференціальних рівняннях. Для розв'язання задач динаміки матеріальної точки та динаміки матеріальної системи широко застосовуються загальні теореми динаміки.

2. Кількість руху і імпульс сили

Загальні теореми динаміки матеріальної точки встановлюють залежність між змінами динамічних заходів руху матеріальної точки і заходами дії сил, прикладених до цієї точки.

Кількістю руху *mv* матеріальної точки називають вектор, що дорівнює добутку маси точки на її швидкість і має напрямок швидкості.

Кількість руху є динамічною мірою руху матеріальної точки.

Одиницею вимірювання кількості руху, в відповідно до наведеного визначення, є (кг × м) / с.

Імпульсом Ft постійної сили F називається вектор, що дорівнює добутку сили на час її дії.

Імпульс сили є мірою її дії за часом.

Одиниця імпульсу сили, згідно з наведеним вище визначенням, є Н × с.

Якщо силу замінити твором маси на прискорення (другий закон Ньютона), то отримаємо: $[Ft] = [F]\ [t] = [a]\ [m]\ [t] = (кг \times м / c^2\ ) \times c = (кг \times м) / c.$

Очевидно, що кількість руху і імпульс сили виражаються в однакових одиницях, тому між цими динамічними заходами існує залежність, що встановлюється теоремою про зміну кількості руху.

Рух під дією постійної сили може бути і прямолінійним і криволінійним (в останньому випадку матеріальна точка має початкову швидкість, вектор якої не збігається з вектором сили). Приклад руху під дією постійної сили - вільне падіння тіл.

Теорема про зміну кількості руху

Теорема: зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу прикладеної до неї сили за той же проміжок часу.

Доведемо цю теорему для випадку прямолінійного руху матеріальної точки під дією постійної сили F, в цьому випадку рух буде равнопеременное, і швидкість в кожен момент часу може бути визначена за формулою:

$$v = v_0 + at.$$

Перетворимо цей вираз: перенесемо v0 в ліву частину і помножимо кожне з доданків рівняння на масу m матеріальної точки:

$$mv - mv_0 = mat.$$

Але добуток маси точки на її прискорення є сила, під дією якої точка рухається, отже, рівняння буде справедливо у вигляді: $mv - mv_0 = Ft$. У лівій частині отриманого рівності маємо зміна кількості руху за час t, а в правій - імпульс сили за цей же час, що й треба було довести. Якщо рух уповільнений ($v < v_0$),то вектор сили направлений в сторону, протилежну вектору швидкості, і, отже, в подальші формулу силу слід підставляти з негативним знаком.

В цьому випадку математичне вираз теореми про зміну кількості руху набуває такого вигляду:

$$mv - mv0 = \int F\, dt.$$

Якщо до матеріальної точці докладено кілька постійних сил, то зміна кількості руху дорівнюватиме сумі (алгебраїчної, якщо сили діють по одній прямій, і векторної, якщо сили діють під кутом один до одного) імпульсів даних сил:

$$mv - mv0 = \Sigma\ (Fit).$$

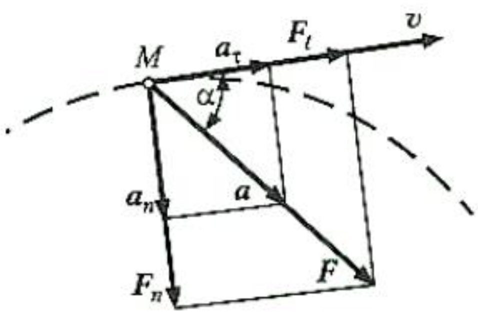
3. Механічна енергія та її види

Слово "енергія" в перекладі з грецького означає "дія". У попередній статті було дано визначення енергії, як здатності матерії здійснювати роботу при переході з одного стану в інший.

Механічною енергією називають енергію переміщення і взаємодії тіл, при цьому розрізняють два види механічної енергії: кінетичну і потенційну.

Потенційною енергією називають енергію взаємодії між матеріальними тілами (точками) будь-якої системи. Потенційна енергія, як частина загальної механічної енергії системи матеріальних тіл, залежить від взаємного розташування тіл (частин) цієї системи, і від їх положень в зовнішньому силовому полі (наприклад, гравітаційному).

Мірою потенційної енергії є робота, яку зробить матеріальне тіло (точка) при звільненні від зв'язків, які дозволяють виплеснути цю енергію.



Кінетична енергія - це енергія руху, тобто їй володіє будь-яка рухається матеріальна точка. Кінетична енергія є динамічною мірою руху матеріальної точки; це скалярна і завжди позитивна величина.

Оскільки кінетична енергія є енергією руху, очевидно, що її величина залежить від швидкості, з якою рухається матеріальна точка (тіло). Величина кінетичної енергії, яку має ця матеріальна точка, може бути визначена за формулою: $K = mv2 / 2.$

Неважко помітити, що кінетична і потенційна енергія матеріальної точки є величинами відносними, оскільки вони мають сенс лише в межах певної системи матеріальних точок - або відносним розташуванням, або відносною швидкістю по відношенню до інших матеріальних точок цієї системи.

Одиниця виміру кінетичної енергії - *Джоуль (Дж):*

$$1\ Дж = кг \times (м / с)\ 2 = (кг \times м / с2\ )\ м = Н \times м$$

Теорема про зміну кінетичної енергії

Теорема: зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому шляху дорівнює роботі сили, прикладеного до точки на тому ж шляху.

Доведемо цю теорему для самого загального випадку руху матеріальної точки, тобто для випадку криволінійного руху під дією змінної сили (рис. 1).

Запишемо для цієї точки основне рівняння динаміки (другий закон Ньютона): ***F = ma,***

m - маса точки; a - повне прискорення точки; F - сила, що діє на точку.

Спроектуємо векторне рівність на напрямок швидкості v точки:

$$ma \cos \alpha = F\tau = F \cos \alpha.$$

Як відомо з кінематики, $a \cos \alpha = a\tau = dv / dt$, отже,

$$m\ dv / dt = F \cos \alpha.$$

Помноживши обидві частини рівності на нескінченно мале переміщення ds, отримаємо:

$$m\ dv\ ds / dt = F\ ds \cos \alpha.$$

Вираз, що стоїть в лівій частині перетворимо наступним чином:

$$m\ dv\ ds / dt = m\ dv\ (ds / dt) = mv\ dv,\ отже\ mv\ dv = Fds \cos \alpha.$$

Інтегруючи обидві частини цієї рівності в межах для швидкості від v_0 до v і для шляху від 0 до s, отримаємо:

$$m \int v\ dv = \int F \cos \alpha\ ds\ або\ mv\ 2 / 2 - mv_0\ 2 / 2 = W,$$

де W - робота сили F на шляху s.

Теорема доведена.

При уповільненому русі ($v < v_0$) складова Fτ, що викликає дотичне прискорення aτ , буде направлена в сторону, протилежну напрямку вектора швидкості v, і робота сили F буде негативною.

Складова Fn, що викликає нормальне (доцентрове) прискорення an, роботи не робить, оскільки ця складова в кожен даний момент часу перпендикулярна елементарного переміщення точки прикладання сили F.

Якщо до матеріальної точці докладено кілька сил, то зміна кінетичної енергії дорівнює алгебраїчній сумі робіт цих сил:

$$mv\ 2 / 2 - mv0\ 2 / 2 = \Sigma Wi.$$

Закон збереження механічної енергії

Закон збереження механічної енергії матеріальної точки можна сформулювати так: сума потенційної і кінетичної енергії матеріальної точки є величина постійна, при цьому один вид енергії може переходити в інший при зміні механічного стану точки.

Так, потенційна енергія положення тіла, обумовлена силою тяжіння, може бути визначена, як твір сили тяжіння тіла G на висоту його підйому h над поверхнею Землі: $П = Gh$.

Задача: матеріальна точка кинута з Землі вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м / с.

Нехтуючи опором повітря, визначити максимальну висоту підйому h, на яку підніметься точка.

Рішення:

Для вирішення завдання запишемо вираз для кінетичної і потенційної точки енергії в момент початку руху:

$$K_1 = mv^2 / 2; П_1 = 0$$

і в момент максимального підйому:

$K_2 = 0; П_2 = mgh$, де m - маса матеріальної точки.

Відповідно до закону збереження механічної енергії можна записати:

$$K_1 + П_1 = K_2 + П_2 \text{ або } mv^2 / 2 = mgh.$$

Скоротивши обидві частини рівності на m, визначимо висоту h максимального підйому матеріальної точки:

$$h = v_0^2 / 2g = 202 / (2 \times 9{,}81) \approx 20{,}4 \text{ м.}$$

Задача вирішена.

Розділ 2. Опір матеріалів.

Лекція №14

Основні положення опору матеріалів.

План:

1.Завдання і методи опору матеріалів

2. Основні поняття опору матеріалів

3. Класифікація тіл, що приймається в опорі матеріалів

4. Поняття про деформації та сили

5. Розтягування і стиснення

1. Завдання і методи опору матеріалів

Опір матеріалів – це наука про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій, деталей машин і приладів.

Міцність – це здатність тіл протидіяти зовнішнім силам, не руйнуючись.

Жорсткість – це здатність тіл протидіяти зовнішнім силам, якомога менше деформуючись.

Стійкість – це здатність тіл протидіяти зовнішнім силам, зберігаючи первісну форму пружної рівноваги.

Під терміном «конструкція» будемо розуміти сукупність елементів (тіл), які функціонально пов’язані між собою та виконують певне технічне завдання. Таким чином, **опір матеріалів** – це загальна наука про міцність і надійність конструкцій та їх елементів. Ці ж питання вивчають й інші суміжні дисципліни: будівельна механіка стержневих систем, яка в більшості розглядає закономірності, пов’язані зі створенням цілих систем стержнів, функціонально пов’язаних між собою: математична теорія пружності, теорія пластичності, теорія повзучості, реологія та ін.

Задачі опору матеріалів

При проектуванні конструкцій і машин інженеру доводиться вибирати матеріал і поперечні розміри для кожного елемента конструкції так, щоб він надійно, без ризику руйнуватися або спотворити свою форму, чинив опір дії зовнішніх сил, які передаються на нього від сусідніх частин конструкції, тобто, щоб була забезпечена нормальна робота цього елемента. Підстави для правильного вирішення цієї задачі дає інженеру наука про опір матеріалів.

Опір матеріалів, вивчаючи поведінку різних матеріалів під впливом сил, вказує, як підібрати для кожного елемента конструкції необхідний матеріал і поперечні розміри за умови повної надійності роботи і найбільшого здешевлення конструкції.

Іноді в опорі матеріалів доводиться вирішувати видозмінену задачу — перевіряти достатність розмірів уже запроектованої або існуючої конструкції.

2. Основні поняття опору матеріалів

Опір матеріалів, як і будь-яка інша наука, базується на певних гіпотезах (аксіомах), основними з яких є:

– гіпотеза про суцільність матеріалу – матеріал заповнює все тіло;

– гіпотеза про однорідність та ізотропність − матеріал вважають однорідним та ізотропним;

– гіпотеза про малі деформації − розглядають деформації, які значно менші за розміри самих тіл (на 2 порядки і більше);

– гіпотеза про ідеальну пружність (пружність – здатність тіл відновлювати свою форму та розміри при розвантаженні);

– закон Гука − приймається лінійна залежність між величинами сил і деформаціями, які викликані ними.

Більшість задач опору матеріалів розв’язують саме в цій постановці.

– принцип суперпозиції − вважають, що результат від суми дій дорівнює сумі результатів від кожної дії окремо;

– принцип Сен-Венана − якщо тіло навантажене силами і при цьому розміри зони прикладання цих сил незначні в порівнянні з розмірами тіла, то в перерізах, достатньо віддалених від місць прикладання сил, напруження практично не залежить від способу навантаження.

3. Класифікація тіл, що приймається в опорі матеріалів

В опорі матеріалів, як і в будь-якій науці, розглядають не самі конкретні тіла, а якийсь спрощений їх символ, модель, абстрагуючись від другорядних ознак цього тіла.

Усі тіла при розгляді задач опору матеріалів можна віднести до однієї з відповідних моделей:

– стержень (брус) – це тіло, в якого один із розмірів значно більший, ніж два інших (рис.1). При цьому стержень може бути з прямою віссю (прямий стержень) або ламаною віссю (рама). Стержні можуть бути як призматичні (рис.1а,б). так і змінного поперечного перерізу (рис.1в);

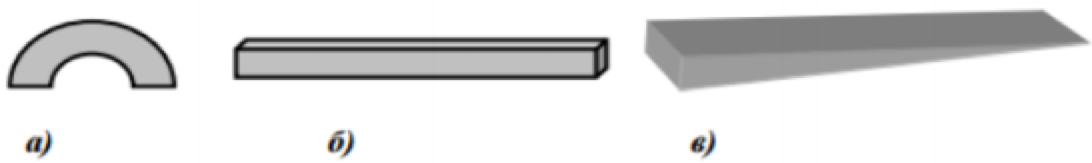


Рисунок 1 - Типи стержнів (а – кривий, б – прямий, в – змінного поперечного перерізу)

− оболонка – це тіло, в якого один із розмірів значно менший, ніж два інших (рис.2а). За формою серединної поверхні оболонки поділяють на циліндричні, конічні, сферичні. Якщо серединна поверхня є площиною, то таку оболонку називають пластиною (рис.2б).

Рисунок 2 - Оболонка (а) та пластина (б)

– масиви – тіла, в яких усі розміри приблизно одного порядку (рис.3).

Рисунок 3 - Масив

Прикладами деталей, які розглядають як прямі стержні, є вали, балки, осі. Криві стержні – крюки підйомних кранів, віконні ручки і т.п. Як оболонки можна розглядати стінки котлів, обшивку крила літака, корпус підводного човна й т.п. До пластин відносять плоскі кришки люків, панелі перекриття, диски турбомашин і т.п. Масивами можуть бути представлені куски каменю, блоки фундаментів та ін.

5.Поняття про деформації та сили

Під **деформаціями** розуміють будь-які зміни розмірів або форми тіла. Деформації можуть бути абсолютні та відносні (коли їх вимірюють відношенням зміни величини до її початкового значення). У більшості випадків деформація тіла складається з двох частин: пружної та пластичної (залишкової).

Пружні – це деформації, які зникають при розвантаженні тіла.

Пластичні – такі, що залишаються після розвантаження.

За нормальної експлуатації інженерних конструкцій не допускаються пластичні деформації, коли розміри і форми елементів конструкцій незворотно змінюються.

Визначення умов виникнення та зростання пластичних деформацій має велике значення для знаходження тих навантажень, які безпечно можуть передаватися на конструкцію.

Сили та їх класифікація.

Сили, що діють на тіло, можна класифікувати за різними ознаками. Вони можуть бути зовнішніми та внутрішніми. **Зовнішні** – це сили, які прикладаються до тіла за рахунок інших тіл. Зовнішні сили, розподілені по всьому об'єму тіла або його частині, називають об'ємними або масовими. Зовнішні сили, прикладені по поверхні, називають поверхневими.

Навантаження – це система зовнішніх сил, що діють на тіло.

Внутрішніми силами називають сили взаємодії між частинами твердого тіла. Зовнішні сили викликають деформації тіл, що призводить до виникнення вже внутрішніх сил. Навантаження тіла може бути статичним або динамічним.

Статично прикладені – це сили, при дії яких практично немає прискорень тіла (чи його частин). Це має місце, коли навантаження тіла проводити, повільно змінюючи від нуля до повного прикладання сили.

Динамічним називають навантаження, при якому виникають прискорення тіла (чи якоїсь його частини) і, як наслідок, сили інерції. Навантаження може бути зосередженим (діяти в досить локальній зоні – практично в точці) (рис.4а) та розподіленим (тобто діяти або на певній площадці, або на певній довжині) (рис.4б,в).

Якщо розподіл має рівномірний характер (рис.4в), навантаження називають рівномірно-розподіленим. Для того, щоб порахувати повне навантаження Q в цьому випадку, рівномірно - розподілене навантаження q треба помножити відповідно на площу, по якій воно розподіляється (або на довжину – у випадку розповсюдження по довжині). Тобто у випадку, зображеному на рис. 4в.

$Q = qa$.

Зосереджені сили, як правило, позначають великими літерами F,R,Q,H ; вони мають розмірність одиниць сили (Н), (кН) та (МН).

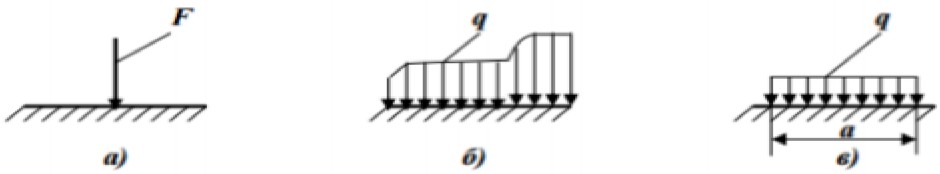


Рисунок 4 - Види навантажень: а) зосереджене, б) розподілене, в) рівномірно розподілене

Розподілене навантаження, як правило, позначають літерою q і воно має розмірність сили, віднесеної до площі (або сили, віднесеної до довжини) (Н/м2), (кН/м2) та (МН/м2), або (Н/м), (кН/м) та (МН/м).

Момент сили відносно точки (осі) – це добуток сили на плече (рис 5).

Плече – це відстань від точки (осі), відносно якої визначають момент, до лінії дії сили (а не до точки прикладання сили, як дехто помилково думає).

Тобто момент сили F відносно точки (осі) A розраховують так:

$$MA = F \cdot a ,$$

де a – це і є плече – довжина перпендикуляра, встановленого від т. A до лінії дії сили F.

Моменти сил позначають літерами M або T ; вони мають розмірність добутку сили на довжину - (Нм), (кНм) та (МНм).

При цьому треба зауважити: якщо силу F переміщувати вздовж лінії її дії, момент її відносно точки (осі) A буде залишатися незмінним.

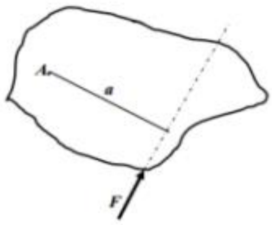


Рисунок5. Обчислення моменту сили F відносно точки (осі) A

Цілком зрозуміло також, що у випадку, коли напрямок дії сили проходить через точку (вісь), момент сили відносно цієї точки (осі) дорівнює нулю. Позначають моменти сил як показано на рис. 6 а,в. T M а) б)

Рисунок 6 - Моменти сил: а) крутний, б) згинаючий

5. Розтягування і стиснення

Напруги і характер деформацій при розтягуванні і стисненні

Розтягуванням або стисненням називається такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки поздовжня сила.

Бруси з прямолінійною віссю, що працюють на розтяг або стиск, часто називаються **стрижнями**.

Розглянемо невагомий, затиснений лівим кінцем прямий брус, уздовж осі якого діють активні сили F і 2F (рис. 7). Частини бруса постійного перерізу, укладені між поперечними площинами (перетинами), в яких прикладені однакові зовнішні сили (навантаження або реакції зв'язків) будемо називати ділянками тобто ділянка - це однорідний шматок бруса і за формою, і по навантаженнях, і по площі перетину.

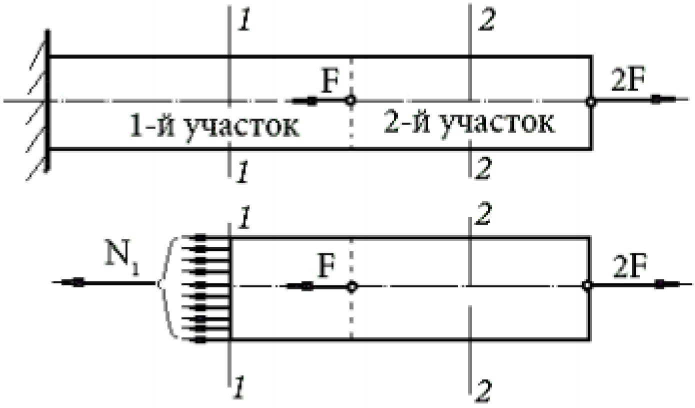


Рисунок 7 - невагомий, затиснений лівим кінцем прямий брус

Зображений на рис. 7 брус складається з двох ділянок - від защемленого кінця до місця прикладання сили F, і від сили F до вільного кінця, до якого прикладена сила 2F.

Застосуємо метод перетинів і визначимо поздовжні внутрішні сили N1 і N2 на цих ділянках.

Спочатку розсічемо брус площиною 1-1 і подумки відкинемо праву частину бруса, замінивши її еквівалентними внутрішніми і зовнішніми силами.

Застосуємо рівняння рівноваги для цієї частини бруса:

$$\Sigma Z = 0, \text{ отже: } 2F - F - N1 = 0, \text{ звідки } N1 = 2F - F = F.$$

Таким чином, поздовжня сила в поперечному перерізі бруса дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, розташованих по одну сторону від розглянутого перерізу і в межах кожної ділянки має однакове значення.

При визначенні величини поздовжньої сили алгебраїчним складанням зовнішніх сил слід звертати увагу на знаки (векторні значення) цих сил. При розрахунках в спрямують зазвичай приймають навантаження, що розтягують (спрямовані від перетину) позитивними, а стискають - негативними.

Щоб зрозуміти характер напружень і деформацій, що виникають в стисливому або розтягувати брусі, уявімо собі прямий брус з гуми, на якому нанесена сітка з поздовжніх і поперечних ліній. Якщо такий брус піддати деформації розтягування, можна помітити, що:

- поперечні лінії на брусі залишаються рівними і перпендикулярними осі бруса, а відстані між ними збільшаться;

- поздовжні лінії залишаться прямими, а відстані між ними зменшаться.

З цього експерименту випливає. $\sigma = N / A$,

де N - поздовжня сила, A - площа поперечного перерізу бруса.

Очевидно, що при розтягуванні і стисненні форма перетину бруса на величину напружень не впливає.

Для ступеневої бруса, до якого прикладені стискає 2F і розтягує 3F сили на рис. 8 показані відповідні епюри поздовжніх сил N і нормальних напруг σ.

Порядок побудови епюр такий: спочатку під кресленням бруса проводять пряму лінію, паралельну осі бруса (ця лінія умовно представляє брус), потім навпаки кожного перетину бруса відкладають по цій лінії величину силових факторів: для позитивних - вгору, для негативних - вниз. Масштаб при цьому вибирається довільний. Зрозуміло, перед побудовою епюри необхідно підрахувати величину силових факторів (сил, моментів сил або напруг) в кожній ділянці бруса.

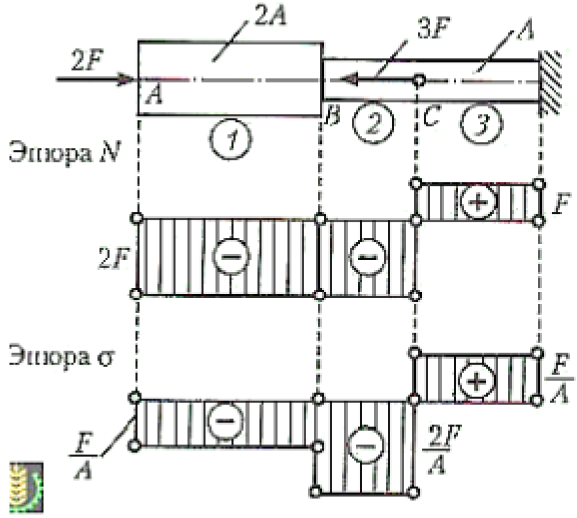


Рисунок 8 – Побудова епюр

На отриманому графіку в гуртках вказуються знаки силових факторів по ділянках, на зовнішніх кутах східчастих переходів ставляться числові значення цих силових факторів, а вся площа графіка заштриховується тонкими лініями, перпендикулярними осі. Зліва від осі епюри вказується, який силовий фактор на ній представлений.

За епюрах, представленим на рис. 8 можна помітити, що в місцях прикладання зовнішніх навантажень і реакцій внутрішні силові фактори змінюються стрибкоподібно (принцип Сен-Венана).

Крім того, епюра будь-якого силового фактора дозволяє (без застосування зайвих розрахунків) визначити силу або момент, що діють на брус з боку, наприклад, закладення, оскільки після побудови епюри з боку вільного кінця бруса ці силові фактори відобразяться графічно, без обчислень.

Лекція 15. Згин. Поперечні сили та згинаючі моменти

План:

1. Поперечні сили, згинаючі моменти та їх епюри
2. Побудова епюр поперечних сил та згинаючих моментів

Згин – це один з простих видів навантаження (деформування) бруса, при якому у його поперечному перерізі діє внутрішній згинальний момент (M z 0), внаслідок чого вісь бруса викривляється.

Брус, що працює на згин, називається балкою.

Згин може виникати під дією зовнішніх поперечних сил (зосереджених або розподілених по довжині бруса) та моментів пар сил (рис.1).

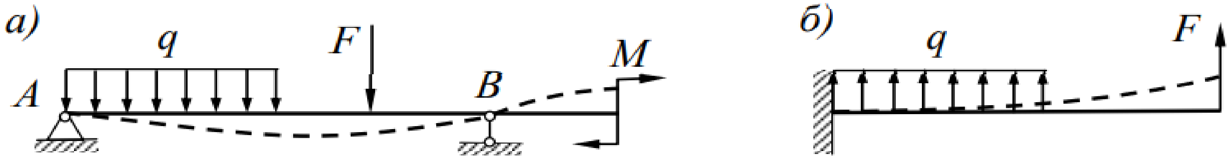


Рис.1 Приклади розрахункових схем балок при згині

Розрізняють

- чистий згин (M z const 0 , Qy 0);
- поперечний згин (M z 0, Qy 0).

Якщо площина дії згинального моменту (силова площина) проходить через одну з головних центральних осей поперечного перерізу бруса, згин називається плоским прямим. При цьому викривлена вісь бруса буде плоскою кривою, яка розташована в силовій площині.

Якщо навантаження не лежать в одній силовій площині, то і викривлена вісь бруса буде просторовою кривою. У такому разі маємо складний просторовий згин. Таку схему навантаження можна розглядати як суперпозицію двох плоских прямих згинів, для чого усі навантаження треба розкласти на складові по головних осях інерції перерізу.

Розрахунки на міцність та жорсткість при згині починаються з того, що для заданої розрахункової схеми складають рівняння рівноваги та визначають опорні реакції.

Потім застосовують *метод перерізів*. Змінюючи поточну координату x вдовж осі балки, аналізують закономірності, за якими змінюються внутрішні силові фактори – поперечна сила Qy та згинальний момент M z , та будують їх епюри – графіки Qy та M z .

Правило знаків для Qy : при підсумовуванні сила враховується як додатна, якщо вона намагається повернути відокремлену частину балки відносно перерізу за стрілкою годинника (рис. 2, а).

Правило знаків для М z : момент враховується як додатний від тих навантажень, які згинають балку опуклістю вниз (рис.2, б).

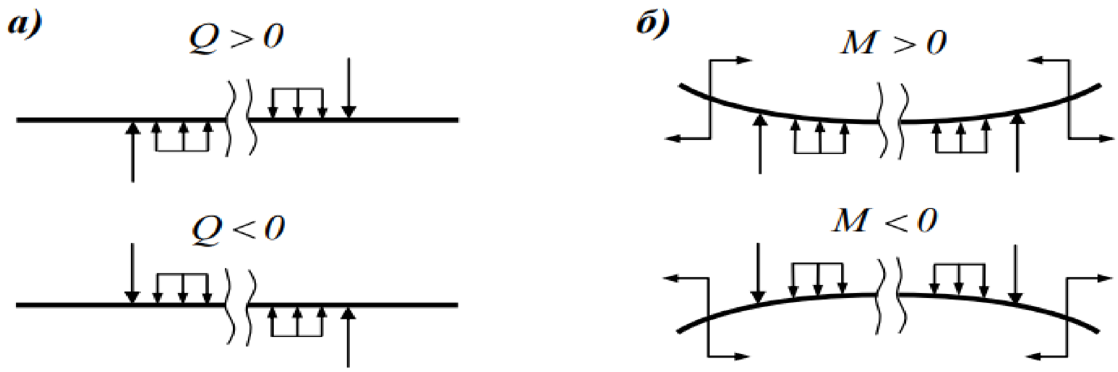


Рис. 2 Правила знаків для поперечної сили Q та згинаючих моментів M_z

Лекція 16. Нормальні напруги при згині. Розрахунки на міцність при згині.

План:

1. Нормальні напруження при згині

2. Умова міцності при згині

3. Розв'язання задач на побудову внутрішніх силових факторів та розрахунків на міцність при згині.

1. Нормальні напруження при згині.

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z},$$

тобто вони змінюються пропорційно відстані від нейтрального слою.

Максимальні значення нормальні напруження будуть мати при максимальній відстані від нейтральної осі

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z y_{\max}}{I_z} = \frac{M_z}{I_z}.$$

Відношення $\dfrac{I_z}{y_{\max}} = W_z$ – осьовий момент опору.

Для круглого перерізу $y_{\max} = \dfrac{d}{2}$.

$$W_z = \frac{\pi d^4 2}{64 d} = \frac{\pi d^3}{32}.$$

2. Умова міцності при згинанні має вигляд.

$$\boldsymbol{\sigma_{max}} = \frac{\boldsymbol{Mx_{max}}}{\boldsymbol{W_x}} \leq [\boldsymbol{\sigma}]$$

Розглянемо принципи визначення нормальних напруг при згині.

Задача: Для заданої консольної балки побудувати епюри поперечних сил та згинаючих моментів. Для перерізу, вказаної форми, розрахувати розміри.

Дано:
$[\sigma]$ = 160 МПа
F_2=1kH
F_1=2 kH
M=12 kH м
h/b=2

Q_y -?
M_x - ?
h x b ?

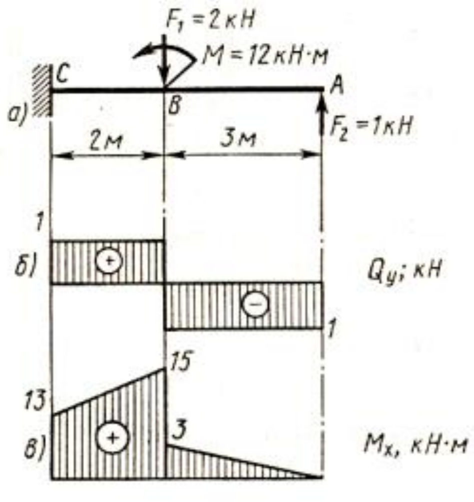


рис.3

Розв'язання

3. Розбиваємо балку на ділянки і на кожній з них розраховуємо поперечні сили та згинаючі моменти:

1 ділянка: 0≤z≤3
Q_{y1} = - F_2= - 1kH
M_{x1} = F_2 z
M_x(0)= 0
M_x(3)=3 кН м

2 ділянка: 3≤z≤5
Q_{y2} = - F_2 + F_1= - 1 + 2 = 1 kH
M_{x2} = F_2 z + M - F_1 (z – 3)
M_x(3)= 3 + 12 – 0 = 15 кН м
M_x(5)=5 + 12 – 2 (5 – 3) = 13 кН м

4. Будуємо епюри поперечних сил (рис. 3,б) та згинаючих моментів (рис. 3,в) у довільному масштабі.

5. Для найбільш навантаженого перерізу, де виникає Mxmax= 15 кН м, розрахуємо розміри із умови міцності:

Wx= Mx_{max}/[σ]=93700 $мм^3$

Так як для прямокутника (заданої форми перерізу балки) Wx=hb^2/6;
з врахуванням, що h/b=2, звідки h =2 b.
Тоді Wx=h$(2b)^2$/6= $4b^2$/6

b= $\sqrt[3]{6Wx/4}$= $\sqrt[3]{6 \cdot 93700/4}$= 52 мм

6. h = 2 b = 2 · 52 = 104 мм.

Лекція 17.

Практичне заняття №2

Тема заняття: Побудова епюр поперечних сил і згинаючих моментів та рохрахунки на міцність.

Мета: набути практичних навиків і умінь побудови епюр Q_y і M_x та розрахунків на міцність .

Послідовність розв’язування:

1.Визначаються опорні реакції 1. $\sum M_A = 0 \quad \sum M_\beta = 0$.

2.Виконується перевірка, $\sum У_i = 0$.

(Рівність даного рівняння нулю після підставлення в нього значень говорить про те, що реакції знайдено вірно).

3.Вираховуємо значення поперечних сил Q_y і згинаючих моментів M_x в характерних точках (це перерізи, які співпадають межами ділянок)

4.Використовуючи правила побудови епюр по характерним точкам будуємо юпюри поперечних сил Q_y і згинаючих моментів M_x .

5.Визначаємо розрахунковий (максимальний по величині) згинаючий момент Mx_{max}. І з умови міцності на згин $G_{max} = \frac{Mx_{max}}{W_x} \leq (G)$ визначаємо потрібний момент опору поперечного перерізу $W_x = \frac{Mx_{max}}{[G]}$.

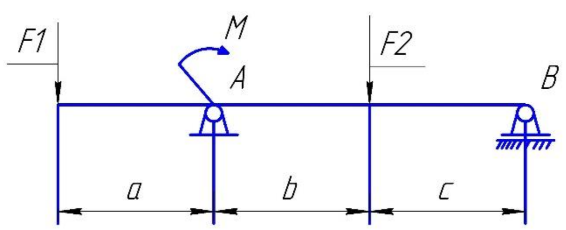
6.Визначаємо поперечні перерізи (стандартні профілі по ГОСТ).

а) круг $W_x = 0{,}1d^3 \qquad d = \sqrt[3]{\frac{10\, W_x}{\pi}}$

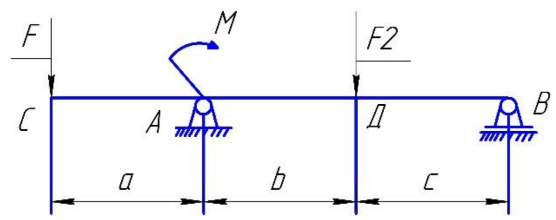
б) прямокутник $W_x = \frac{b^2}{6}$;   квадрат - $W_x = \frac{b^3}{6}$

$b = \sqrt[3]{6W}$;

а)

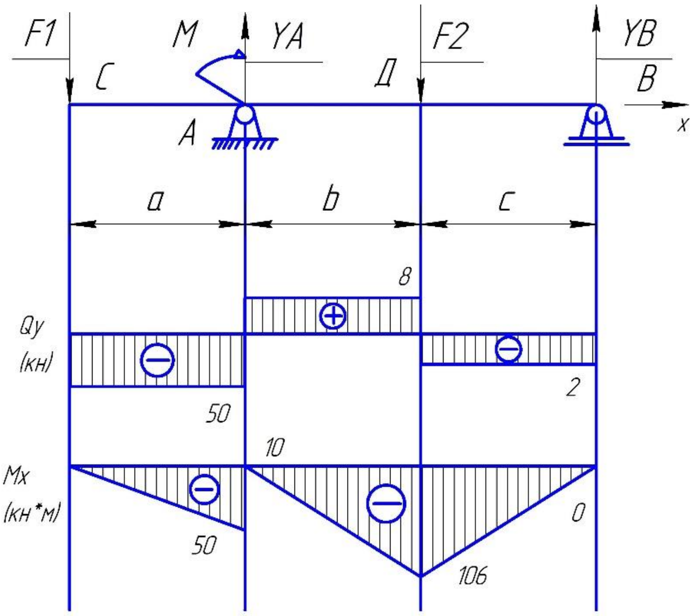


б)



№варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F (кн)	20	30	40	50	60	70	80	90	100	20	30	40	50	60	70	80	90	100	20	30
M(кн*м)	50	40	30	20	10	50	40	30	20	10	50	40	30	20	10	50	40	30	20	10
F_1 (кн/м)	80	100	120	140	80	100	120	140	80	100	120	140	80	100	120	140	80	100	120	140
a(м)	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
b(м)	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
c(м)	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2

Задача.



Побудувати епюри поперечних сил Q_y і згинаючих моментів M_x .

F_1= 50кн, F_2= 10кн, M= 40 кн*м, a=1м, b=2м, c=3м, $[G]$= 160М:Па.

Розв'язок:

1.Визначаємо опорні реакції.

$$\sum M_A = 0.\ F_1 * \mathrm{a} - \mathrm{M} - F_2 * b + Y_B(b+c) = 0$$

$$\sum \mathrm{M_B} = 0.\ F_1(a+b+c) - M - Y_A * (b+c) + F_2 * c = 0.$$

З першого рівняння:

$$Y_B = \frac{-F_1 * a + M + F_2 * b}{b+c} = \frac{-50*1+40+10*2}{5} = 2\ \text{кн};$$

$$Y_A = \frac{F_1 * (a+b+c) - M + F_2 * c}{a+b+c} = \frac{50(1+2+3)-40+10*3}{2+3} = 58\ \text{кн};$$

2.Перевірка:

$$\sum Y_i = 0. \quad -F_1 + Y_A - F_2 + Y_B = 0$$

$$-50 + 58 - 10 + 2 = 0$$

0=0 Реакції визначено вірно.

3.Ділимо балку на ділянки по характерним точкам С,А,Д,В (отримали три ділянки), визначаємо поперечні сили на кожній ділянці і будуємо епюру Q_y.

$$Q_1 = -F_1 = -50 \text{ (кн)}$$

$$Q_2 = -F_2 + Y_A = -50 + 58 = 8 \text{ (кн)}$$

$$Q_3 = -F_1 + Y_A - F_2 = -50 + 58 = -2 \text{ (кн)}$$

4.Визначаємо згинаючі моменти і будуємо епюру M_x

$$M_c = 0. \quad M_{A\text{рів}} = -F_1 * a = -50 * 1 = -50 \text{ (кн)}$$

$$M_{A\text{пр}} = -F_1 * a + M = -50 * 1 + 40 = -10 \text{ (кн * м)}$$

$$M_Д = -F_1 * (a + b) + M + Y_A * b = -50(3) + 40 + 2 * 2 = 106 \text{ (кн*м)}$$

$$M_B = 0.$$

Будуємо епюру.

5.Визначаємо максимальний згинаючий момент з епюри $Mx_{max} = 106$ (кн * м).

6.З умови міцності на згин

$$G_{max} = \frac{Mx_{max}}{W_x} \leq [G]$$

визначаємо осьовий момент опору перерізу:

$$W_x = \frac{Mx_{max}}{[G]} = \frac{106 * 10^6 \text{н*мм}}{160 \text{н}/\text{мм}^2} = 662 * 10^3 \text{ (мм}^3\text{)}.$$

Визначаємо поперечні розміри:

а) круг $W_x = \frac{\pi * d^3}{32} \approx 0{,}1 d^3$

$$d = \sqrt[3]{10 * W_x} = \sqrt[3]{10 * 662} = 18{,}9 \text{ (см)}$$

Приймаємо d=19 см. $A_{кр} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 * 19^2}{4} = 283$ (см^2)

б) квадрат $W_x = \frac{b^3}{6}$ $b = \sqrt[3]{6 * W_x} = \sqrt[3]{6 * 662} = 15{,}8$ (см)

Приймаємо b=16 см. $A_{кв} = 16^2 = 256$ (см^2)

По ГОСТ 8240-72 приймаємо швелер №40 $W_x = 761$ см^3 $A_{шв} = 61{,}5$ см^2.

По ГОСТ 8239-72 приймаємо двутавр №36 $W_x = 743$ см^3 $A_{дв} = 61{,}9$ см^2.

Виписуємо переріз в порядку зростання площ $A_{шв} = 61{,}5$ см^2, $A_{дв} = 61{,}9$ см^2, $A_{кв} = 256$ см^2, $A_{кр} = 283$ см^2.

Лекція 18.Кручення. Крутний момент та побудова його епюр

План:

1. Крутний момент та його епюри
2. Умова міцності при крученні
3. Розрахунки на міцність при крученні

1. **Крутний момент та його епюри**

Кручення – це один з простих видів навантаження (деформування) бруса, при якому у поперечному перерізі бруса діє тільки внутрішній крутний момент (Tx 0). Брус, навантажений крутним моментом, називають валом (незалежно від форми перерізу).

Розглянемо задачу кручення круглого валу (рис.1)

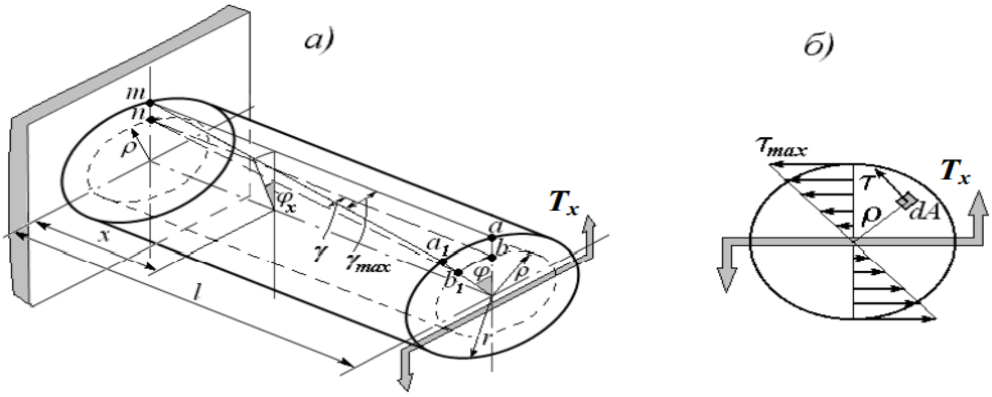


Рис.1

Теоретичні і експериментальні дослідження деформації кручення круглого вала дають підстави прийняти таку геометричну модель (рис.1, а):

1 Ось вала при крученні залишається прямолінійною.

2 Поперечні перерізи вала, плоскі до деформації, залишаються в своїй площині і лише повертаються навколо осі вала. Таким чином, відстані між поперечними перерізами вала у процесі деформації не змінюються.

3 Радіуси перерізу залишаються при крученні прямолінійними.

Кручення у відповідності з цією моделлю подається як результат зсувів, визначених взаємним обертанням перерізів. Кут закручення φx вважаємо лінійною функцією x , тобто погонний (відносний) кут закручення Θ не змінюється по довжині вала:

$$\theta = \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{\varphi}{l} = const$$

Зробимо переріз на довільній відстані x від затиснення (рис1, а). При зсуві в поперечних перерізах вала виникають тільки дотичні напруження. Виділимо на перерізі (рис. 1, б) нескінченно малу площадку dA на відстані від осі вала. Дотична сила dA , яка діє на цій площадці, створює відносно осі вала елементарний момент dTx= dA . Повний момент внутрішніх сил (внутрішній крутний момент)

$$T_x = \int_A \tau \cdot \rho \, dA.$$

У цьому рівнянні шуканою величиною є закон розподілу дотичних напружень , а момент Тх вважаємо вже визначеним за зовнішніми навантаженнями з умов рівноваги відрізаної частини вала.

Загальна формула дотичних напружень у довільній точці перерізу закручуваного вала:

$$\boxed{\tau = \frac{T_x \cdot \rho}{I_p}}$$

Таким чином, дотичні напруження при крученні зростають за лінійним законом пропорційно відстані точки перерізу від осі вала, згідно з епюрою (рисунок 1, б). В точках, однаково віддалених від осі, напруження рівні за величиною, а спрямовані перпендикулярно радіусу-вектору даної точки. Максимальні напруження діють у найвіддаленіших від осі точках перерізу, при $\rho = \rho_{\max} = r$:

$$\tau_{\max} = \frac{T_x \cdot r}{I_p} = \frac{T_x}{W_p},$$

де $W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{\pi d^3}{16}$ – полярний момент опору.

1. Умова міцності при крученні.

$$\boldsymbol{\tau_{max} = \frac{Tx_{max}}{W_p} \leq [\tau]}$$

де $\boldsymbol{[\tau] = (0,5 - 0,6)[\sigma]}$

Література

1. Булгаков В., Черниш О., Яременко В. Теоретична і прикладна механіка. Частина I - К: Центр навчальної літератури, 2018. – 752 с.
2. Кузьо І. В., Ванькович Т., Н. М., Зінько Я. А., Смерека І. П.. Теоретична механіка. Кінематика.Навчальний посібник. Львів: Видавництво Львівської політехніки. – 2007. – 188 с.
3. Черниш О., Яременко В., Березовий М. Теоретична механіка. Навчальний посібник - К: Центр навчальної літератури, 2018. – 760 с.

Технічна механіка [Текст]: Конспект лекцій для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр технічних спеціальностуй заочної форми здобуття освіти. / уклад. Степан Бабарика. – Ковель: ВСП «КПЕФК ЛНТУ», 2026. – 60 с.

Комп'ютерний набір і верстка: Степан БАБАРИКА

Редактор: Степан БАБАРИКА

Підп. до друку «___»________2026. Формат 60х84/16. Папір офіс.

Гарн. Таймс. Ум. друк. арк. ____ Обл.-вид. арк. ___ Зам. ___

Тираж ____ прим.

ВСП «КПЕФК ЛНТУ»

45000 м. Ковель, вул. Заводська, 23

Друк – ВСП «КПЕФК ЛНТУ»